Herleitung neuer windschiefer Kegelschnitte durch die Bianchische Transformation B_k.

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde der
Hohen philosophischen Fakultät der
Vereinigten Friedrichs-Universität
Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Friedrich Kurth
aus Nienburg (Saale).

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Halle a. S. — 1913.
Hofbuchdruckerei von C. A. Kaemmerer & Co.

Referent: Herr Professor Dr. **A. Gutzmer.**

Meinen Eltern.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544727_0093

Inhalt.

Seite

Literatur 7

Einleitung.

§ 1. Bianchische Transformation B_k der Flächen zweiter Ordnung 9

§ 2. Grenzfall. Übergang zu den windschiefen Kegelschnitten 11

§ 3. Bianchische Transformation der windschiefen Kegelschnitte 13

§ 4. Ziel und Resultat vorliegender Untersuchungen . 15

Abschnitt I.

Transformation der windschiefen Ellipse.

§ 1. Formeln für die windschiefen Ellipsen Γ, die durch Torsion aus einer ebenen C hervorgehen 18

§ 2. Die mit C beim Abrollen auf Γ verbundenen Kurven und Flächen und die Strahlenkongruenz S . . . 22

§ 3. Zerlegung der Strahlenkongruenz in abwickelbare Linienflächen 30

§ 4. Transformierte windschiefe Ellipsen 40

§ 5. Transformation des windschiefen Kreises 45

Abschnitt II.

Transformation der windschiefen Hyperbel.

§ 1. Formeln für die windschiefen Hyperbeln Γ, die durch Torsion aus einer ebenen C hervorgehen . 47

§ 2. Die mit C beim Abrollen auf Γ verbundenen Kurven und Flächen und die Strahlenkongruenz S . . . 50

Seite

§ 3. Zerlegung der Strahlenkongruenz in abwickelbare Linienflächen 56
§ 4. Transformierte windschiefe Hyperbeln 63

Abschnitt III.
Transformation der windschiefen Parabel.

§ 1. Formeln für die windschiefen Parabeln Γ, die durch Torsion aus einer ebenen C hervorgehen 66
§ 2. Die mit C beim Abrollen auf Γ verbundenen Kurven und Flächen und die Strahlenkongruenz S . . . 68
§ 3. Zerlegung der Strahlenkongruenz in abwickelbare Linienflächen 73
§ 4. Transformierte windschiefe Parabeln 79

Literatur.

Für die vorliegende Arbeit sind grundlegend und wurden benutzt:

L. Bianchi: Lezioni di geometria differenziale. Volume III. Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche. Pisa 1909.

H. Kössler: Über windschiefe Kegelschnitte; Inaugural-Dissertation. Halle 1911.

Einleitung.

§ 1.

Bianchische Transformation B_k der Flächen zweiter Ordnung.

In seinem Werke: Lezioni di geometria differenziale, Volume III, entwickelt Bianchi eine Transformationstheorie für die Biegungsflächen von Flächen zweiten Grades. Für die in unserer vorliegenden Arbeit erstrebten Ziele ist es zuerst nötig, sich mit der Bianchischen Transformationstheorie der Biegungsflächen von Linienflächen bekannt zu machen, mit denen auch Bianchi seine Untersuchungen beginnt.

Wir wollen uns zuerst ein Paar beliebiger, auf einander abwickelbarer Linienflächen R und R' denken und annehmen, daß die Abwickelung von R' auf R statthabe durch stetige Deformation derart, daß die Schar der Erzeugenden von R' sich beim Ausbreiten von R' auf R mit derjenigen von R deckt, die denselben Drehungssinn hat, rechts- beziehungsweise linksgewunden ist. Man betrachtet zwei beliebige einander so entsprechende Erzeugende r und r' auf R und R'. Wenn ein Punkt M die Erzeugende r durchläuft, soll der entsprechende Punkt M' in gleichen Bahnstrecken die Erzeugende r' durchlaufen. Die Tangentenebenen an R und R' in M und M' werden dann beide Drehungen um r beziehungsweise r' vollführen, welche gleich sind und denselben Drehungssinn haben. Wenn wir nun beide Flächen längs der beiden Erzeugenden r und r' in ihren korrespondierenden Punkten aufeinander legen und überdies noch zwei ihrer Tangentenebenen in zwei Anfangspunkten, so werden auch alle übrigen Tangentenebenen längs r' auf R' mit den entsprechenden von R zusammenfallen. Die Flächen R und R' berühren

sich längs der gemeinsamen Erzeugenden r. Sei nun R im Raume fest vorgestellt. Auf alle Erzeugenden r von R nacheinander wollen wir die Fläche R' so gelegt denken, daß sie R längs jedes r berührt in der eben beschriebenen Weise. Die Fläche R' nimmt dabei eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Lagen an, die durch infinitesimale Drehungen um die jeweilige gemeinsame Erzeugende aus einander hervorgehen; wir sagen, sie rollt auf der Linienfläche R.

Spezialisieren wir die Fläche R' in eine Linienquadrik Q, die auf die Linienfläche R abwickelbar ist. Vorausgesetzt sei, daß den Erzeugenden von R durch stetige Deformation etwa die Geraden der ersten Schar auf Q entsprechen. Mit Q unveränderlich fest verbunden denken wir eine beliebige konfokale Linienquadrik Q'. Lassen wir Q auf R rollen, so wird bei dieser Bewegung auch die konfokale Linienquadrik Q' mitgeführt, deren Erzeugende der ersten Schar eine erste Strahlenkongruenz G beschreiben; ähnlich erzeugen die Geraden der zweiten Schar eine zweite Kongruenz $\overline{G}$. Die Geraden der Kongruenz G oder $\overline{G}$ lassen sich in Linienflächen R_1 anordnen, derart, daß jede Fläche R_1 von jeder Lage der Quadrik Q' eine Erzeugende enthält. Wir greifen eine solche Fläche R_1 heraus und nennen ihre Geraden r_1. Zwischen den Punkten von R und R_1 können wir eine Beziehung konstruieren, indem wir jedem Punkte F einer Erzeugenden r von R den bestimmten Punkt F_1 auf R_1 zuordnen, in welchem die Tangentenebene an R in F die entsprechende Gerade r_1 schneidet.

Hieran knüpft sich der Hauptsatz für die Transformationstheorie der geradlinigen Biegungsflächen von Flächen zweiter Ordnung.

Satz I. (Bianchi, Lezioni III, S. 10):

Wenn eine Linienquadrik Q auf einer auf sie abwickelbaren Linienfläche R rollt, ist jede der Strahlenkongruenzen G und $\overline{G}$, die von den Geraden der ersten oder zweiten Schar der konfokalen Quadrik Q' erzeugt werden, in einer einzigen und bestimmten Weise zerfäll-

bar in eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Linienflächen R_1, die alle folgende Eigenschaften haben:

a) Jede Linienfläche R_1 bildet mit der ursprünglichen Linienfläche R die zwei Brennmäntel eines W-Strahlensystems, das durch die Verbindungslinien FF_1 ihrer korrespondierenden Punkte gebildet wird.

b) Die Linienflächen R_1 sind alle auf dieselbe Quadrik Q abwickelbar und damit auf dieselbe Linienfläche R. Die Abwickelung der R_1 auf R hat statt durch stetige Deformation.

Diesen Satz beweist Bianchi für alle vorkommenden Fälle. Die Linienquadrik Q', welche die Transformation bewirkt, ist unter der Schar ihrer Konfokalen durch eine Konstante k charakterisiert. Solche hierdurch definierte Transformation nennt Bianchi B_k.

§ 2.
Grenzfall. Übergang zu den windschiefen Kegelschnitten.

In den bisherigen Betrachtungen ist angenommen, daß die ursprüngliche Quadrik Q nicht degeneriert. Alle Haupteigenschaften dieser Transformationen bleiben auch in dem Grenzfall erhalten, in dem Q in eine der singulären Quadriken der konfokalen Schar übergeht, indem sie in die Tangentenschar eines der Fokalkegelschnitte degeneriert.

Mit diesem Problem beschäftigt sich Bianchi in der Nota II seines vorher genannten Werkes: Sopra un caso limite delle trasformazioni B_k per le deformate delle quadriche.

Der fundamentale Satz I besteht richtig weiter in unserem Grenzfall, wenn er passend geändert wird. Er liefert Transformationen einer Kurvenklasse, die man aus den gewöhnlichen Kegelschnitten erhält, wenn man diese als biegsame und undehnbare Kurven ansieht und sie verbiegt, ohne in den einzelnen Punkten die Krümmung zu ändern. Die so erhaltenen Kurven nennt Bianchi „coniche distorte“, was wir übersetzen mit „tordierte“ oder „windschiefe Kegelschnitte“.

Diese Definition erlaubt als erste natürliche Gleichung unserer Kurven die natürliche Gleichung der ebenen Kegelschnitte zu benutzen:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 9\left(-1 + Ar^{\frac{2}{3}} - Br^{\frac{4}{3}}\right),$$

worin A, B Konstanten, s die Bogenlänge und r der Krümmungsradius seien. Als zweite natürliche Gleichung der windschiefen Kegelschnitte dient eine Vorschrift für die Torsion

$$\frac{1}{\varrho} = f(u);$$

s, r, ϱ seien als Funktionen des Parameters u aufgefaßt.

Wir betrachten die windschiefen Kegelschnitte als Deformierte der ebenen oder als auf sie Abwickelbare. Das einfachste Beispiel der Kurven dieser Klasse bietet sich in den Deformierten des Kreises, das heißt, in den Kurven mit konstanter Krümmung, den circoli storti bei Cesàro.

In der Literatur werden Spezialfälle der windschiefen Kegelschnitte erwähnt bei:

W. Schell: Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung. 2. Aufl. Leipzig 1898. Seite 95.

Pirondini: Sul problema di trovare la curva di cui è noto il luogo de' sui centri di curvatura. Annali di Mat. (2) 17, 65—79.

Cesàro: Vorlesungen über natürliche Geometrie. Deutsche Ausgabe. Leipzig 1901. Seite 182.

Bianchi nimmt in seiner Arbeit die windschiefen Kegelschnitte als gegeben an, ohne von ihnen explizite Gleichungen aufzustellen. Mit den endlichen Gleichungen und weiteren Eigenschaften unserer Kurven beschäftigen sich die Arbeiten:

E. Salkowski: Über eine bemerkenswerte Klasse von Raumkurven. Jahresbericht d. D. Math. Vereinigung. XX (1911), Seite 255.

H. Kössler: Über windschiefe Kegelschnitte. Inaugural-Dissertation. Halle 1911.

§ 3.
Bianchische Transformation der windschiefen Kegelschnitte.

Wenn sich in dem genannten Satz I die Quadrik Q auf die Ebene der Tangenten an den Fokalkegelschnitt C reduziert, wird die Fläche $\overline{R}$, auf der Q rollt, selbst eine Abwickelbare; ihre Gratlinie Γ wird ein windschiefer Kegelschnitt, Deformierte von C sein in dem oben festgesetzten Sinne. Bei dem Abrollen von Q auf $\overline{R}$ rollt der Kegelschnitt C auf seiner Deformierten Γ derart, daß die Ebene von C sukzessive mit den Schmiegungsebenen von Γ zusammenfällt.

Man betrachte nun eine Quadrik Q' des konfokalen Systems, das C als Fokalkegelschnitt besitzt. C' sei der Hauptschnitt von Q' mit der Ebene von C, ein Kegelschnitt, der konfokal mit C ist.

Mitgezogen beim Abrollen beschreibt dieser Kegelschnitt C' eine Gesimsfläche, die wir mit Σ bezeichnen. Die Erzeugenden des einen oder anderen Systems von Q' beschreiben je eine Strahlenkongruenz; die Gratlinien Γ' der einen Schar von den abwickelbaren Flächen, die in jeder dieser Kongruenzen enthalten sind, liegen auf der Gesimsfläche Σ. Da der Satz I im Grenzübergang richtig bleibt, so werden die abwickelbaren Flächen mit den Gratlinien Γ' auf Q abwickelbar sein, wobei die Erzeugenden in die Tangenten des Kegelschnittes C übergehen. Die Kurven Γ' sind windschiefe Kegelschnitte, Deformierte desselben ursprünglichen C wie Γ. Wir erhalten folgenden Satz II:

> Gegeben sei ein ebener Kegelschnitt C und eine zu ihm konfokale Linienquadrik Q', von der C Fokalkegelschnitt ist. Wir lassen die Kurve C, indem sie Q' mit sich führt, auf einem windschiefen Kegelschnitt Γ abrollen, der durch Torsion aus C entstanden, der auf C abwickelbar ist. Dann bilden während der Bewegung die Geraden der einen wie andern Schar von Q' eine Strahlenkongruenz. Diese läßt sich in zwei Scharen abwickelbarer Flächen zerlegen. Die eine Schar dieser besitzt zu Gratlinien

neue windschiefe Kegelschnitte Γ', die Deformierte desselben C sind.

Bianchi beweist in seinem Werke diesen Satz. Er untersucht dann noch gewisse Grenzfälle.

Unter den Transformationen B_k der windschiefen Kegelschnitte Γ ist die singuläre Transformation bemerkenswert, die man erhält, wenn C', der zu C konfokale Kegelschnitt und Hauptschnitt von Q', in die doppelt überdeckte Fokalachse A degeneriert und die Linienquadrik Q' sich dadurch auf die Gesamtheit der Tangenten an den andern Fokalkegelschnitt $\overline{C}$ von C reduziert. In diesem Falle geht der Ort der Γ', bisher Gesimsfläche, in eine abwickelbare Fläche Σ' über, die durch die Fokalachse A von C erzeugt wird beim Abrollen auf Γ. Bianchi kommt hier zu folgendem Satz III.

> Wenn zwei Kegelschnitte C und $\overline{C}$ zu einander Fokalkurven sind, und wenn man einen von ihnen, etwa C, auf einem windschiefen Kegelschnitt Γ, seiner Deformierten, abrollen läßt, so erzeugen die Tangenten des andern Fokalkegelschnittes $\overline{C}$, indem sie beim Abrollen mitgeführt werden, ein Strahlensystem, dessen abwickelbare Flächen der einen Schar zu Gratlinien die ∞^1 Lagen von $\overline{C}$ haben. Die Abwickelbaren der zweiten Schar haben zu Gratlinien wieder windschiefe Kegelschnitte, Deformierte von C.

Die abwickelbare Fläche Σ' hat zur Gratlinie eine Kurve R. Diese ist Ort der Schnittpunkte für die verschiedenen Lagen der Fokalachse A von C und der gemeinschaftlichen Tangente von C und Γ. Auf A liegen die Brennpunkte F und Scheitel L aller konfokalen Kegelschnitte C', im Falle von Mittelpunktskegelschnitten auch die Mittelpunkte O.

Es ist geometrisch evident, daß die beim Abrollen von C durch diese Punkte erzeugten Brennpunkts-, Scheitel- und Mittelpunktskurven Filarevolventen sind von R und zugleich Planevolventen des gegebenen windschiefen Kegelschnittes Γ.

Bei Fokalkegelschnitten ist nun der Brennpunkt des einen zugleich Scheitel des andern und umgekehrt; ihre Ebenen stehen auf einander senkrecht. F ist als Brennpunktskurve von C

auf der Fläche Σ' zugleich Scheitelkurve der ∞^1 Lagen des andern Fokalkegelschnittes $\overline{C}$, der beim Abrollen von C die Fläche K beschreibt, den zweiten Brennmantel für den betrachteten Grenzfall der Bianchischen Transformation. Σ' und K schneiden einander in den Brennpunktskurven F.

Längs F stehen die Tangenten an jede einzelne Lage des zweiten Fokalkegelschnitts $\overline{C}$ senkrecht zur Fläche Σ' und sind zugleich Tangenten an die Kurven F, die ja als Planevolventen von Γ die Fläche Σ' senkrecht durchsetzen. Die Kurven F erscheinen so als Gratlinien einer abwickelbaren Fläche, die durch Tangenten an den zweiten Fokalkegelschnitt erzeugt ist. Soweit genügen diese Kurven dem Satze III. Dennoch können sie nicht die gesuchten transformierten windschiefen Kegelschnitte sein. Da sie Filarevolventen von R und Planevolventen von Γ sind, ist es nicht möglich, sie auf denselben Ausgangskegelschnitt C und auf Γ abzuwickeln; sie sind keine windschiefen Kegelschnitte. Wir wollen diese Kurven von der Betrachtung ausschließen. Einer späteren Untersuchung muß es vorbehalten bleiben, den tieferen Grund aufzudecken, weshalb diese Kurven nicht berücksichtigt werden dürfen.

§ 4.

Ziel und Resultat vorliegender Untersuchungen.

In seinem oben genannten Werke erreicht Bianchi die Transformation windschiefer Kegelschnitte. Aber nicht durch direkte Verfolgung der geometrischen Zusammenhänge gelangt er zu seinen Endresultaten. Es handelt sich bei ihm vielmehr um die Anwendung der Eigenschaften einer dort auftretenden Riccatischen Differentialgleichung.

Es erschien nun möglich das Problem direkt anzugreifen und, ohne den Umweg bei Bianchi, unter Benutzung der geometrischen Zusammenhänge die endlichen Gleichungen für die transformierten windschiefen Kegelschnitte aufzustellen. Auf diesen Versuch machte mich Herr Professor Dr. Gutzmer im Verein mit Herrn Professor Dr. E. Salkowski, Berlin,

aufmerksam und veranlaßte mich so zu folgenden Untersuchungen; beide Herren haben mir bei der Durchführung der Arbeit viele wertvolle Ratschläge erteilt.

In dieser Untersuchung werden die drei verschiedenen windschiefen Kegelschnitte, die windschiefe Ellipse, Hyperbel und Parabel gesondert behandelt.

Zuerst stellen wir, in Anlehnung an die oben genannte Kößlersche Arbeit, eine Reihe von Formeln auf für alle windschiefen Kegelschnitte, die sich durch Torsion aus einem vorgelegten ebenen ableiten lassen, so die Ausdrücke für die Bogenlänge und Krümmung und gewisse Differentialformeln, die den Frenet'schen Formeln sehr nahe stehen, und die in der Folge oft angewendet werden.

Hiernach werden die Gleichungen entwickelt für die mit dem auf Γ abrollenden Kegelschnitt C verbundenen Kurven und Flächen. Dann bauen wir die Formel für die Strahlenkongruenz S auf.

Nachdem dies erreicht ist, folgen wir der in der Einleitung dargelegten geometrischen Betrachtung von Bianchi. Es gilt jetzt, das erhaltene Strahlensystem in abwickelbare Linienflächen zu zerlegen und dann die Gratlinien dieser letzteren anzugeben. Dies gelingt auch für den allgemeinsten Fall B_k der Transformation. Wir finden allgemeine Gleichungen für die Gratlinien der beiden Scharen von Abwickelbaren; zugleich aber treten zwei Differentialgleichungen auf, deren eine zu der Schar von Gratlinien gehört.

Durch die Aufstellung natürlicher Gleichungen kommen wir zu demselben Resultat wie in Satz II: Nur die Gratlinien der einen Schar von Linienflächen sind windschiefe Kegelschnitte Γ' und Transformierte des ursprünglich gegebenen Γ. Die durch die zweite Differentialgleichung charakterisierten Raumkurven der anderen Schar sind keine windschiefen Kegelschnitte. Diese Kurven sind auf der Fläche Σ die zu den gefundenen neuen windschiefen Kegelschnitten Γ' Konjugierten.

Durch einfaches Einsetzen in die Endformeln erhalten wir auch die durch den (in Satz III erwähnten) Grenzfall

der Bianchischen Transformation — B_{b^2} für windschiefe Ellipse und Hyperbel, B_p für windschiefe Parabel — resultierenden Kurven.

Dann gelingt es leicht, durch Vergleichung unserer Endresultate mit denen bei Bianchi eine einfache Substitution anzugeben, mit Hilfe deren beide Endformeln in einander übergehen. Auf zwei verschiedenen Wegen ist so dasselbe erreicht und das Bianchische Ergebnis durch vollständige Durchführung der Rechnung verifiziert.

Die auftretende Differentialgleichung ist im allgemeinen nicht lösbar, da sie ϱ, den Torsionsradius des ursprünglichen windschiefen Kegelschnittes Γ enthält, für den in jedem einzelnen Sonderfall eine beliebige Funktion eingesetzt werden kann. Doch können wir für beliebig viele Spezialfälle Partikularlösungen angeben. Wir gelangen zu folgendem Satz:

> Ist ein Kegelschnitt vorgelegt, und wird er nach einem anzugebenden Gesetz tordiert, daß daraus ein windschiefer Kegelschnitt entsteht, so ist einer seiner Transformierten angebbar, sobald die Auflösung einer Riccatischen Gleichung gelingen würde. Denn die tordierte Kurve, deren natürliche Gleichungen in diesem Falle gegeben sind, wird erst durch die Lösung einer Riccatischen Gleichung und durch Quadraturen in endlicher Form gefunden.

Da die in Frage stehende ursprüngliche Differentialgleichung auch eine Riccatische ist und nun eine partikuläre Lösung bekannt ist, so können durch Quadraturen alle übrigen gefunden werden.

> Ist auf obige Weise zu einem gegebenen ein transformierter windschiefer Kegelschnitt bekannt geworden, so kann man auch alle andern finden.

Dieses Ergebnis würde über Bianchi hinausführen. Man kann die letzten beiden Sätze auch verallgemeinern auf die Differentialgleichungen des allgemeinen Transformationsproblems B_k für Biegungsflächen von Flächen zweiten Grades, so auf die in Bianchi, Lezioni III, Seite 19 und 53.

Abschnitt I.

Transformation der windschiefen Ellipse.

§ 1.

Formeln für die windschiefen Ellipsen Γ, die durch Torsion aus einer ebenen C hervorgehen.

Wir gehen aus von einer ebenen Ellipse C mit den Halbachsen a und b, wobei die Annahme $a > b$ keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Wir berechnen ihre Bogenlänge s und Krümmung $\frac{1}{r}$, die sie in entsprechenden Punkten mit allen windschiefen Ellipsen gemeinsam hat, die durch Torsion aus ihr erzeugt werden.

Die Gleichungen der Kurve C schreibt man zweckmäßig:

$$x = a \sin \varphi; \quad y = -b \cos \varphi.$$ [1])

Dann ist

$$(1) \qquad ds = a\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi; \quad \varkappa = \frac{e}{a}, \quad e^2 = a^2 - b^2.$$

Der Quadratwurzel legen wir das positive Vorzeichen bei, indem wir festsetzen, daß s mit φ wachsen soll. Dann ist

$$s = a\int_0^{\varphi} \sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi = a\, E_{(\varphi)}$$

Zugleich betrachten wir das Integral

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}}$$

1) Diese Formeln hängen mit denen der Kößlerschen Arbeit S. 14 zusammen durch $\varphi = t + \frac{\pi}{2}$.

und führen die elliptischen Funktionen nach Jacobi ein:

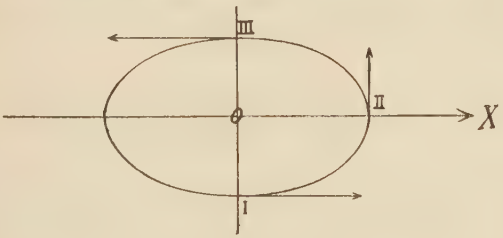
$$\varphi = am\, u$$
$$\sin\varphi = sn\, u$$
$$\cos\varphi = cn\, u$$
$$\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi} = dn\, u. \quad \text{Es ist } \frac{d\varphi}{du} = dn\, u.$$

Wir berechnen die Krümmung von C als

$$\frac{1}{r} = \frac{b}{a^2\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}^{\,3}} = \frac{b}{a^2 dn^3 u}. \tag{2}$$

Nun betrachten wir den Kontingenzwinkel dT, der in entsprechenden Punkten bei C und Γ gleich ist. Eine geometrische Betrachtung sei vorausgeschickt.

T ist der Winkel, den die positive Tangentenrichtung mit der positiven Richtung der X-Achse bildet.



In Punkt I der Figur ist φ und T gleich 0

II $\quad \frac{\pi}{2}$

III $\quad \frac{3\pi}{2}$

und so weiter.

In jedem der betrachteten Punkte ist $\varphi = T$.

Nun ist
$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r}$$
$$\frac{dT}{d\varphi} = \frac{1}{r}\frac{ds}{d\varphi} = \frac{x'}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi},$$

wenn wir mit $\varkappa'$ den Ausdruck $+\sqrt{1-\varkappa^2}=\frac{b}{a}$ bezeichnen.

Integration ergibt:

$$T-C=\text{arc tang}\,(-\varkappa'\,\text{cotg}\,\varphi).$$

Zur Bestimmung von C dient die vorausgeschickte geometrische Betrachtung; sie lieferte

$$T=\varphi \qquad C=O.\ ^{1})$$

Demnach ist $\quad \text{tg}\,T=-\varkappa'\,\text{cotg}\,\varphi$

und

$$(3)\qquad \begin{cases} \sin T=\dfrac{\varkappa'\sin\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}=\dfrac{\varkappa' sn\,u}{dn\,u} \\ \cos T=\dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}=\dfrac{cn\,u}{dn\,u}. \end{cases}$$

Jetzt haben wir die Stücke s, r und dT berechnet, die die ebene Ellipse C und die windschiefen Γ gemeinsam haben. Wir bemerken hier noch die natürliche Gleichung der Ellipse, nach Cesàro, die für C wie Γ gilt:

$$(4)\qquad \frac{ds}{dr}=-\frac{1}{3\sqrt{\left[1-\left(\frac{br}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\left[\left(\frac{ar}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right]}}.$$

Zu dieser ersteren tritt für die windschiefe Ellipse noch eine zweite natürliche Gleichung, welche ihre Torsion charakterisiert:

$$\varrho=f(u).$$

Ist Γ Schraubenlinie, so ist $\frac{r}{\varrho}$ konstant; in diesem Falle ist:

1) Es möge hier darauf hingewiesen werden, daß in der genannten Kößlerschen Arbeit gelegentlich dieser Integration sowohl bei der windschiefen Ellipse als auch bei der windschiefen Hyperbel und Parabel diese Integrationskonstante nicht berücksichtigt ist; sie ist dort stets gleich $\frac{\pi}{2}$ anzunehmen. Infolgedessen sind die dort resultierenden Formeln nicht zutreffend. Zugleich sei bemerkt, daß im II. Abschnitt genannter Arbeit stets die Richtung der Tangente RP verkehrt angenommen ist. Wir werden später berichtigte Formeln angeben.

$$\varrho = \frac{c}{b^3}\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}^{\,3} = \frac{c}{b^3}\,dn^3 u \quad \text{und} \quad \frac{r}{\varrho} = \frac{a^2b^2}{c},$$

worin c eine Konstante bedeutet.

Aus der ersten der Gleichungen (3) resultiert:

$$T = \arcsin\left(\frac{\varkappa' sn\, u}{dn\, u}\right)$$

und hieraus

$$\frac{dT}{du} = -\frac{\varkappa'}{dn\, u}.$$

Aus Gleichung (1) erhalten wir

$$\frac{ds}{d\varphi} = a\, dn\, u; \quad \text{ferner ist } \frac{d\varphi}{du} = dn\, u,$$

woraus folgt:

$$\frac{ds}{du} = a\, dn^2 u. \tag{5}$$

Ein beliebiger Punkt der windschiefen Ellipse Γ habe die Koordinaten x, y, z; und es seien die Richtungskosinus

der zugehörigen Tangente $\alpha \quad \beta \quad \gamma$
der Hauptnormale $l \quad m \quad n$
und der Binormale $\lambda \quad \mu \quad \nu$.

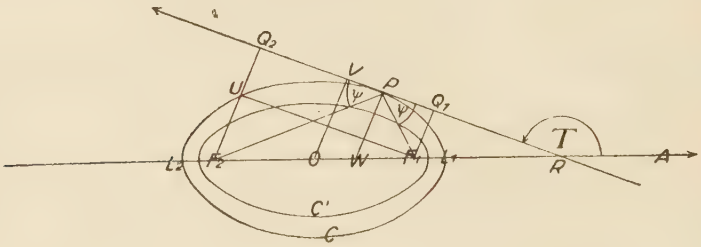
Mit Hilfe der Gleichungen (2) und (5) gehen die bekannten Frenetschen Formeln in folgende über, die wir für spätere Anwendungen hier zusammenstellen.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{du} = \alpha\, a\, dn^2 u \\ \dfrac{d\alpha}{du} = l\,\dfrac{\varkappa'}{dn\, u} \\ \dfrac{dl}{du} = -\alpha\,\dfrac{\varkappa'}{dn\, u} - \lambda\,\dfrac{a\, dn^2 u}{\varrho} \\ \dfrac{d\lambda}{du} = l\,\dfrac{a\, dn^2 u}{\varrho}. \end{cases} \tag{6}$$

§ 2.

Die mit C beim Abrollen auf Γ verbundenen Kurven und Flächen und die Strahlenkongruenz S.

Wir zeichnen eine Figur (wie bei Kößler, S. 32).



Man hat in der Figur die Ellipse C, die ihre Deformierte Γ im Punkte P berührt. RP ist ihre gemeinsame Tangente. Die Bogenlänge von C wächst in der Richtung von L_1 nach P; demnach ist RP die positive Richtung der Tangente. Die Hauptachse von C nennen wir A; auf ihr liegen die Brennpunkte F_1, F_2, die Scheitelpunkte L_1, L_2 und der Mittelpunkt O. Die Achse A und die Tangente in P schneiden einander in R unter dem Winkel T. Ferner ist V der Fußpunkt des Lotes von O auf die Tangente; Q_1, Q_2 sind die Fußpunkte der Lote von den Brennpunkten. UF_1 ist eine Parallele zur Tangente durch F_1. Ferner ist stets:

$$\measuredangle Q_1 P F_1 = \measuredangle Q_2 P F_2 = \psi .$$

Rollt C auf Γ ab, so beschreibt die zu C konfokale Ellipse C' die in der Einleitung erwähnte Gesimsfläche Σ; die Fokalachse A beschreibt die abwickelbare Linienfläche Σ' mit der Gratlinie R, dem Ort der Punkte R. Ebenso erzeugen die Scheitel-, Brenn- und Mittelpunkte Scheitel-, Brennpunkts- und Mittelpunktskurven. Alle ihre Gleichungen wollen wir jetzt angeben. Beim Abrollen ändert sich der Winkel T. Alle Größen können wir als Funktionen von T

berechnen und dann als solche der im vorigen Paragraphen eingeführten Variabeln u darstellen.

Aus der Figur ersieht man, daß ist:

$$Q_2F_2 = PF_2 \sin\psi$$
$$Q_1F_1 = PF_1 \sin\psi$$

$Q_2F_2 + Q_1F_1 = 2a \sin\psi$. Ferner ist im

ΔUF_2F_1: $Q_2F_2 - Q_1F_1 = 2e \sin T$ also folgt:

$$Q_1F_1 = a \sin\psi - e \sin T$$
$$Q_2F_2 = a \sin\psi + e \sin T.$$

Nun ist:
$$PQ_1 = Q_1F_1 \operatorname{cotg}\psi$$
$$PQ_2 = Q_2F_2 \operatorname{cotg}\psi,$$

daher
$$PQ_1 = a \cos\psi - e \sin T \operatorname{cotg}\psi$$
$$PQ_2 = a \cos\psi + e \sin T \operatorname{cotg}\psi,$$

ferner $PQ_1 + PQ_2 = 2a \cos\psi$

und $PQ_1 + PQ_2 = -2e \cos T.$

Es ist also:
$$\cos\psi = -\frac{e}{a}\cos T$$

und
$$\sin\psi = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - e^2\cos^2 T}$$

$$\operatorname{cotg}\psi = -\frac{e\cos T}{\sqrt{a^2 - e^2\cos^2 T}}$$

$$PQ_1 = -e\cos T + \frac{e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}}$$

$$PQ_2 = -e\cos T - \frac{e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}}$$

$$Q_1F_1 = \sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T} - e\sin T$$

$$Q_2F_2 = \sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T} + e\sin T.$$

Nun ist die Gleichung der ersten Brennpunktskurve F_1

$$x_1 = x - \alpha PQ_1 + lQ_1F_1.$$ [1])

1) Nicht $x + \alpha PQ_1 + lQ_1F_1$ wie bei Kößler.

Wir erhalten durch Einsetzen:

$$x_1 = x - \alpha\left(-e\cos T + \frac{e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}}\right) + l\left(\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T} - e\sin T\right) \text{ oder}$$

$$x_1 = x + \left[1 - \frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}}\right]\left[\alpha e\cos T + l\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}\right]$$

und unter Berücksichtigung der Formeln (3) in § 1

$$x_1 = x + \frac{1 - \varkappa\, sn\, u}{dn\, u}(\alpha e\, cn\, u + lb).$$

II. Brennpunktskurve F_2.

$$x_2 = x + \alpha P Q_2 + l Q_2 F_2$$

$$x_2 = x - \alpha\frac{e\cos T}{\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}}\left[\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T} + e\sin T\right] + l\left[\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T} + e\sin T\right]$$

$$= x - \left[1 + \frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}}\right]\left[\alpha e\cos T - l\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}\right]$$

$$x_2 = x - \frac{1 + \varkappa\, sn\, u}{dn\, u}(\alpha e\, cn\, u - lb).$$

I. Scheitelkurve L_1.

Man sieht leicht, daß ist:

$$x_3 = x_1 + \alpha(a - e)\cos T - l(a - e)\sin T$$

$$x_3 = x + \alpha a\frac{cn\, u}{dn\, u}(1 - \varkappa^2\, sn\, u) + l\frac{b(1 - sn\, u)}{dn\, u}.$$

II. Scheitelkurve L_2.

Hier ist:

$$x_4 = x_2 + \alpha(e - a)\cos T + l(a - e)\sin T$$

$$x_4 = x - \alpha a\frac{cn\, u}{dn\, u}(1 + \varkappa^2\, sn\, u) + lb\frac{1 + sn\, u}{dn\, u}.$$

Mittelpunktskurve O.

$$x_5 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$x_5 = x - a\frac{e^2}{a}\frac{sn\,u\,cn\,u}{dn\,u} + l\frac{b}{dn\,u}.$$

Die betrachteten Kurven x_1 bis x_5 sind Parallelkurven, Filarevolventen der Raumkurve R, die durch die Hauptachse A der Ellipse C eingehüllt wird. Zugleich sind sie Planevolventen der windschiefen Ellipse Γ. Ihre Gleichungen genügen der allgemeinen Form:

$$x_n = x - a\frac{cn\,u}{dn\,u}(ax^2\,sn\,u - \tau) + lx'\frac{(-\tau\,sn\,u + a)}{dn\,u}.$$

τ ist ein Parameter auf A, der in O gleich 0 ist, nach F_1 hin wächst. x_n ist eine allgemeine Parallelkurve der Schar, beschrieben von einem Punkte der Achse A, der von O um die Strecke τ entfernt ist.

Kurve R.

Sie ist die erwähnte Gratlinie der Fläche Σ'.

Es ist $x_6 = x - PR\,a$

$$PR = -\frac{b^2\,\mathrm{cotg}\,T}{\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}}$$

$$x_6 = x + a\,a\frac{cn\,u\,dn\,u}{sn\,u}.$$

Wir geben hier die Bestimmungsstücke der Kurve R an:

$$\frac{dx_6}{du} = -a\,a\frac{cn^2\,u}{sn^2\,u} + lb\frac{cn\,u}{sn\,u}$$

$$\frac{ds_6}{du} = a\frac{cn\,u\,dn\,u}{sn^2\,u}$$

$$s_6 = -\frac{a}{sn\,u}$$

$$a_6 = -\frac{1}{dn\,u}(-a\,cn\,u + lx'\,sn\,u)$$

$$l_6 = -\bar{\varepsilon}\lambda$$

$$\lambda_6 = \bar{\varepsilon}\varepsilon'\left(\alpha\varkappa' \frac{sn\,u}{dn\,u} + l\frac{cn\,u}{dn\,u}\right)$$

$$r_6 = \bar{\varepsilon}\frac{\varrho\, cn\, u}{\varkappa'\, sn^3\, u}.$$

Hierin ist $\bar{\varepsilon} = \pm 1$ derart, daß r_6 stets > 0 ist.

$$\varrho_6 = \frac{\varepsilon'\varrho}{sn^2\, u}; \quad \varepsilon' = \pm 1.$$

Es ist $$\frac{1}{\varkappa'^2}\left(\frac{r_6}{\varrho_6}\right)^2 = \frac{s_6{}^2}{a^2} - 1.$$

Von der ebenen Ellipse C, von der wir im § 1 eine Parameterdarstellung gegeben haben, betrachten wir jetzt auch die Darstellung, welche Bianchi in Lezioni III auf Seite 334 gibt:

$$\frac{x_0{}^2}{a^2} + \frac{y_0{}^2}{b^2} = 1; \quad a \geqq b$$

$x_0 = a\cos\bar{u}$; $y_0 = b\sin\bar{u}$; $z_0 = 0$.

Betrachten wir nun unsere Figur, so läßt sich das hier eingeführte Koordinatensystem folgendermaßen orientieren:

Die x_0-Achse fällt mit der Achse A zusammen; in O ist x_0 gleich 0. x_0 ist identisch mit dem oben eingeführten Parameter τ.

Die y_0-Achse liegt auch in der Ebene der Ellipse C, sie steht in O senkrecht auf A. Wir wollen sie mit B bezeichnen.

Die z_0-Achse endlich steht im Punkte O senkrecht zur Ebene von C. Sie heiße D.

Mit der Ellipse C fest verbunden bewegt sich das einschalige Hyperboloid Q'

$$\frac{x_0{}^2}{a'^2} + \frac{y_0{}^2}{b'^2} - \frac{z_0{}^2}{k} = 1.$$

wo $a' = \sqrt{a^2 - k}$, $b' = \sqrt{b^2 - k}$, $0 < k < b^2$ ist.

Wir schreiben das Hyperboloid Q' in Parameterdarstellung

$$x_0 = a'\frac{1 + u_0 v_0}{u_0 + v_0},$$

$$y_0 = b' \frac{u_0 - v_0}{u_0 + v_0},$$

$$z_0 = \sqrt{k} \frac{1 - u_0 v_0}{u_0 + v_0}.$$

Die u_0 sowie v_0 bedeuten die beiden Geradenscharen des Hyperboloids. C ist die Fokalellipse von Q'. Die andere Fokalkurve, eine Hyperbel, die durch F_1 und F_2 gehend L_1 und L_2 zu Brennpunkten hat und zur Ebene von C senkrecht steht, sei $\bar{C}$. Die zu C konfokale Ellipse, der Hauptschnitt des Hyperboloids mit der Ebene von C, seiner x_0, y_0 Ebene, heiße C'. Degeneriert Q' in die Ebene der Fokalhyperbel $\bar{C}$, so degeneriert C' in die doppelt bedeckte Fokalachse A.

Wir geben nun die Gleichungen für die Hauptschnitte unseres Hyperboloids Q' an.

I. Schnitt mit der x_0, z_0-Ebene.

Hier ist $$y_0 = 0.$$

Setzen wir in den hier resultierenden Formeln $k = b^2$, so geben

$$x_0 = e \frac{1 + u_0 v_0}{u_0 + v_0}$$

$$z_0 = b \frac{1 - u_0 v_0}{u_0 + v_0}$$

die Gleichungen für die Tangentenschar an die Fokalhyperbel C. Die Relation $y_0 = 0$ liefert

$$u_0 = v_0.$$

Setzen wir dies ein, so ist

$$x_0 = e \frac{1 + u_0^2}{2u_0} \qquad z_0 = b \frac{1 - u_0^2}{2u_0}$$

die Darstellung von $\bar{C}$ selbst.

II. Schnitt mit der x_0, y_0-Ebene.

Hier ist $$z_0 = 0.$$

$$x_0 = a' \frac{1 + u_0 v_0}{u_0 + v_0}; \qquad y_0 = b' \frac{u_0 - v_0}{u_0 + v_0}$$

sind die Gleichungen der Tangentenschar an die Kehlellipse C'. Die Relation $z_0=0$ ergibt hier

$$1-u_0v_0=0,$$

woraus $$x_0=a'\frac{2u_0}{u_0^2+1};\qquad y_0=b'\frac{u_0^2-1}{u_0^2+1}$$

folgt, die Gleichungen der C' selbst. Setzt man in den letzten Formeln $k=0$, so resultieren die entsprechenden Gleichungen für die Fokalellipse C.

Bisher haben wir die Fokalkegelschnitte und das konfokale Hyperboloid nur in ihrer Parameterdarstellung untersucht. Wir gehen jetzt einen Schritt weiter und wollen ihre Raumgleichungen angeben. Als Endresultat dieser Betrachtungen werden wir die Gleichungen der allgemeinen Strahlenkongruenz S erhalten, die beim Abrollen von C durch die Geradenscharen des Hyperboloids Q' erzeugt wird.

Ein Blick in unsere Figur lehrt, daß zu der Richtung RP der Tangente die Richtungskosinus α, β, γ gehören Die hierzu senkrechte Hauptnormale PW hat als Richtungskosinus l, m, n. Die Binormale von Γ steht in P auf der Ebene von C senkrecht, sie ist parallel zu der (S. 26 eingeführten) z_0-Achse, der Achse D. Die z_0-Achse besitzt demnach als Richtungskosinus λ, μ, ν.

Aus diesen Daten kann man leicht die Richtungskosinus der Achsen A und B ermitteln. Als Richtungskosinus für A ergibt sich:

$$\alpha\cos(\pi-T)+l\sin(\pi-T)$$

oder $$-\alpha\cos T+l\sin T$$

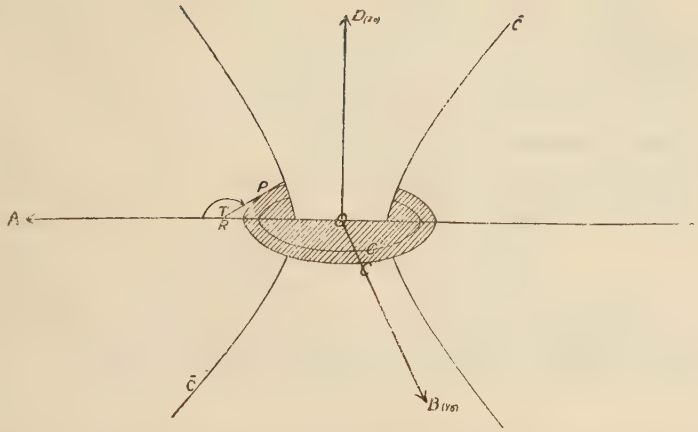
und endlich $$\frac{-\alpha\,cn\,u+lx'\,sn\,u}{dn\,u}$$ und zwei entsprechende.

Die Richtungskosinus für B ergeben sich als

$$\alpha\cos\left(T-\frac{\pi}{2}\right)-l\sin\left(T-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\alpha\sin T+l\cos T$$

oder $$=\frac{\alpha\,x'\,sn\,u+l\,cn\,u}{dn\,u}$$ und so weiter.



Bedeuten x_5, y_5, z_5 die Koordinaten der Mittelpunktskurve O (S. 25), so erhält man nun als Darstellung der Kurve C:

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

$$\mathfrak{x}=x_5+x_0\frac{-\alpha\,cn\,u+l\varkappa'\,sn\,u}{dn\,u}+\varkappa'\sqrt{a^2-x_0^2}\,\frac{\alpha\,\varkappa'\,sn\,u+l\,cn\,u}{dn\,u}.$$

Hieran schließen sich noch entsprechende Formeln für $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$. Für $u=\text{const.}$ bedeutet dies eine spezielle Lage der Fokalellipse C an Γ.

Als Gleichung der Kurve C'

$$\frac{x_0^2}{a'^2}+\frac{y_0^2}{b'^2}=1$$

finden wir:

$$\mathfrak{x}=x_5+x_0\frac{-\alpha\,cn\,u+l\varkappa'\,sn\,u}{dn\,u}+\frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2-x_0^2}\,\frac{\alpha\,\varkappa'\,sn\,u+l\,cn\,u}{dn\,u}.$$

Dies gibt für $u=\text{const.}$ eine spezielle Lage von C'; für variable u stellt die Gleichung die Gesimsfläche Σ, den ersten Brennmantel unseres Strahlensystems vor.

Die Gleichung der Kurve $\overline{C}$

$$\frac{x_0^2}{e^2}-\frac{z_0^2}{b^2}=1 \quad \text{ist}$$

$$\mathfrak{x}=x_5+x_0\frac{-\alpha\,cn\,u+l\varkappa'\,sn\,u}{dn\,u}+\frac{b}{e}\sqrt{x_0^2-e^2}\,\lambda.$$

Dies ist für variable u die Gleichung des zweiten Brennmantels K (S. 15) für den in Satz III erwähnten Grenzfall.

Die Gleichung des einschaligen Hyperboloids können wir nun schreiben:

$$\mathfrak{x}=x_5+a'\frac{1+u_0v_0}{u_0+v_0}\frac{-a\,cn\,u+lx'\,sn\,u}{dn\,u}$$
$$+b'\frac{u_0-v_0}{u_0+v_0}\frac{ax'\,sn\,u+l\,cn\,u}{dn\,u}+\sqrt{k}\frac{1-u_0v_0}{u_0+v_0}\lambda.$$

Dies stellt zugleich die allgemeine Strahlenkongruenz S vor, wenn man neben u_0, v_0 auch u variieren läßt.

§ 3.

Zerlegung der Strahlenkongruenz in abwickelbare Linienflächen.

Jede der Geradenscharen u_0 sowie v_0 auf der Quadrik Q' erzeugt beim Abrollen von C eine Strahlenkongruenz, deren gemeinsame Gleichung wir soeben gewonnen haben. Unser nächstes Ziel ist nun, die abwickelbaren Linienflächen der Strahlensysteme zu ermitteln. Auf S. 26 fanden wir, daß unsere Parameter x_0 und τ identisch sind. Wir schreiben daher:

$$x_0=a'\frac{1+u_0v_0}{u_0+v_0}=\tau \quad \text{oder}$$
$$\frac{x_0}{a'}=\frac{\tau}{a'}=\tau_1\,.$$

Dies führen wir in die übrigen Gleichungen für Q'

$$y_0=b'\frac{u_0-v_0}{u_0+v_0}$$
$$z_0=\sqrt{k}\frac{1-u_0v_0}{u_0+v_0}\ \text{ein.}$$

Es ergeben sich dann zwei Darstellungen für Q'

I.

$$u_0=\frac{1-\tau_1v_0}{\tau_1-v_0};\quad \frac{y_0}{b'}=\frac{1-2\,\tau_1v_0+v_0^2}{1-v_0^2};\quad \frac{z_0}{\sqrt{k}}=\frac{\tau_1-2v_0+\tau_1v_0^2}{1-v_0^2}.$$

II.

$$v_0 = \frac{1-\tau_1 u_0}{\tau_1 - u_0}; \quad \frac{y_0}{b'} = -\frac{1-2\tau_1 u_0 + u_0^2}{1-u_0^2}; \quad \frac{z_0}{\sqrt{k}} = \frac{\tau_1 - 2u_0 + \tau_1 u_0^2}{1-u_0^2}.$$

Diese beiden Darstellungen entsprechen den beiden Geradenscharen. Unsere oben gefundene Gleichung für die Strahlenkongruenz S können wir mit Hilfe dieser Relationen auch in zwei Darstellungen schreiben:

I.

$$\xi = x_5 + a'\tau_1 \frac{-\alpha\, cn\, u + l x'\, sn\, u}{dn\, u} + b' \frac{1-2\tau_1 v_0 + v_0^2}{1-v_0^2} \frac{\alpha x'\, sn\, u + l\, cn\, u}{dn\, u} + \sqrt{k} \frac{\tau_1 - 2v_0 + \tau_1 v_0^2}{1-v_0^2} \lambda$$

oder

$$\xi = x_5 - \alpha \frac{a'\tau_1(1-v_0^2)\, cn\, u - b' x' (1-2\tau_1 v_0 + v_0^2)\, sn\, u}{(1-v_0^2)\, dn\, u} + l \frac{a'\tau_1 x'(1-v_0^2) sn\, u + b'(1-2\tau_1 v_0 + v_0^2) cn\, u}{(1-v_0^2)\, dn\, u} + \lambda\sqrt{k} \frac{\tau_1 - 2v_0 + \tau_1 v_0^2}{1-v_0^2}.$$

II.

$$\xi = x_5 + a'\tau_1 \frac{-\alpha\, cn\, u + l x'\, sn\, u}{dn\, u} - b' \frac{1-2\tau_1 u_0 + u_0^2}{1-u_0^2} \frac{\alpha x'\, sn\, u + l\, cn\, u}{dn\, u} + \sqrt{k} \frac{\tau_1 - 2u_0 + \tau_1 u_0^2}{1-u_0^2} \lambda$$

oder

$$\xi = x_5 - \alpha \frac{a'\tau_1(1-u_0^2)\, cn\, u + b' x' (1-2\tau_1 u_0 + u_0^2)\, sn\, u}{(1-u_0^2)\, dn\, u} + l \frac{a'\tau_1 x'(1-u_0^2) sn\, u - b'(1-2\tau_1 u_0 + u_0^2) cn\, u}{(1-u_0^2)\, dn\, u} + \lambda\sqrt{k} \frac{\tau_1 - 2u_0 + \tau_1 u_0^2}{1-u_0^2}.$$

Man erhält hier die beiden durch die Geraden u_0 und v_0 erzeugten Kongruenzen.

Beide Ausdrücke unter I und II gehen in einander über, wenn man zugleich mit u_0, v_0 auch das Vorzeichen von b' vertauscht.

Wir können daher zur Vereinfachung der Rechnung die Ausdrücke I und II vereinigen. Statt u_0 oder v_0 wählen wir eine neue Bezeichnung; es erweist sich als vorteilhaft, einzuführen

$$u_0 \text{ oder } v_0 = \frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = w.$$

Statt $\pm b'$ schreiben wir $\varepsilon b'$, wobei ist bei

$$w=v_0 \qquad \varepsilon=+1$$
$$w=u_0 \qquad \varepsilon=-1.$$

Wir notieren noch folgende Relationen:

$$w' = -\vartheta' \frac{1+\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$$

$$\frac{2w}{1+w^2} = \sin\vartheta; \quad \frac{1-w^2}{1+w^2} = -\cos\vartheta; \quad \frac{2w}{1-w^2} = -\operatorname{tang}\vartheta$$

$$1+w^2 = \frac{2(1+\cos\vartheta)}{\sin^2\vartheta}; \quad 1-w^2 = -\frac{2\cos\vartheta(1+\cos\vartheta)}{\sin^2\vartheta}.$$

die im Laufe der Rechnung gebraucht werden. Wir erhalten nun als Gleichung des Strahlensystems S:

$$\mathfrak{x} = x_0 - \alpha \frac{a'\tau_1 \, cn\, u \cos\vartheta + \varepsilon b' x' \, sn\, u\,(1-\tau_1\sin\vartheta)}{dn\, u\cos\vartheta}$$
$$+ l \frac{a'\tau_1 x' \, sn\, u\cos\vartheta - \varepsilon b' \, cn\, u\,(1-\tau_1\sin\vartheta)}{dn\, u\cos\vartheta} - \lambda\sqrt{k}\,\frac{\tau_1-\sin\vartheta}{\cos\vartheta}.$$

Die Betrachtung des Falles $\cos\vartheta=0$ schließen wir aus. Er ergibt dieselben Kurven, deren Untersuchung wir auf S. 15 ausgeschaltet haben. Wir setzen den (S. 25 gefundenen) Wert von x_0 ein und bekommen

$$(A)\begin{cases} \mathfrak{x} = x + \alpha\mathfrak{A} + l\mathfrak{B} + \lambda\mathfrak{C} \\ \mathfrak{A} = -\dfrac{e\varkappa\, sn\, u\, cn\, u\cos\vartheta + a'\tau_1 cn\, u\cos\vartheta + \varepsilon b' x' sn\, u(1-\tau_1\sin\vartheta)}{dn\, u\cos\vartheta} \\ \mathfrak{B} = \dfrac{b\cos\vartheta + a'\tau_1 x' \, sn\, u\cos\vartheta - \varepsilon b' \, cn\, u\,(1-\tau_1\sin\vartheta)}{dn\, u\cos\vartheta} \\ \mathfrak{C} = -\dfrac{\sqrt{k}\,(\tau_1-\sin\vartheta)}{\cos\vartheta} \end{cases}$$

als endgültige Darstellung der Kongruenz, an welche die weiteren Untersuchungen anknüpfen.

Wir zerlegen nun die Koeffizienten von

$$\alpha,\ l,\ \lambda.$$

$$\mathfrak{A}=-\frac{1}{dn\,u\cos\vartheta}\{[e\varkappa\ sn\,u\ cn\,u\cos\vartheta+\varepsilon b'\varkappa'\ sn\,u]$$
$$+\tau_1[a'\ cn\,u\cos\vartheta-\varepsilon b'\varkappa'\ sn\,u\sin\vartheta]\}$$

$$\mathfrak{B}=\frac{1}{dn\,u\cos\vartheta}\{[b\cos\vartheta-\varepsilon b'\ cn\,u]$$
$$+\tau_1[a'\varkappa'\ sn\,u\cos\vartheta+\varepsilon b'\ cn\,u\sin\vartheta]\}$$

$$\mathfrak{C}=\frac{\sqrt{k}}{\cos\vartheta}\{\sin\vartheta-\tau_1\}.$$

Hier erhält man eine Normalform des Strahlensystems S:

$$\text{(B)}\qquad \begin{aligned}\mathfrak{x}&=\varphi+\tau_1 f\\ \mathfrak{y}&=\chi+\tau_1 g\\ \mathfrak{z}&=\psi+\tau_1 h.\end{aligned}$$

Dabei ist:
$$\begin{aligned}\varphi&=x+\alpha\,\mathfrak{A}_1+l\,\mathfrak{B}_1+\lambda\,\mathfrak{C}_1\\ f&=\quad\alpha\,\mathfrak{A}_2+l\,\mathfrak{B}_2+\lambda\,\mathfrak{C}_2,\end{aligned}$$

worin bedeutet:

$$\mathfrak{A}_1=-\frac{\overline{\mathfrak{A}}_1}{dn\,u\cos\vartheta};\quad \mathfrak{B}_1=\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{dn\,u\cos\vartheta};\quad \mathfrak{C}_1=\frac{\overline{\mathfrak{C}}_1}{\cos\vartheta};$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{A}}_1&=e\varkappa\ sn\,u\ cn\,u\cos\vartheta+\varepsilon b'\varkappa'\ sn\,u\\ \overline{\mathfrak{B}}_1&=b\cos\vartheta-\varepsilon\,b'\ cn\,u\\ \overline{\mathfrak{C}}_1&=\sqrt{k}\ \sin\vartheta.\end{aligned}$$

$$\mathfrak{A}_2=-\frac{\overline{\mathfrak{A}}_2}{dn\,u\cos\vartheta};\quad \mathfrak{B}_2=\frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{dn\,u\cos\vartheta};\quad \mathfrak{C}_2=-\frac{\overline{\mathfrak{C}}_2}{\cos\vartheta};$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{A}}_2&=a'\ cn\,u\cos\vartheta-\varepsilon\,b'\varkappa'\ sn\,u\sin\vartheta\\ \overline{\mathfrak{B}}_2&=a'\varkappa'\ sn\,u\cos\vartheta+\varepsilon\,b'\ cn\,u\sin\vartheta\\ \overline{\mathfrak{C}}_2&=\sqrt{k}.\end{aligned}$$

Es seien hier noch einige Ausdrücke zusammengestellt, deren wir bei der kommenden Rechnung bedürfen.

Wir bilden die Ableitungen von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$ nach u; ϑ sehen wir als Funktion von u an und schreiben $\frac{d\vartheta}{du} = \vartheta'$. Dann ist

$$\mathfrak{A}'_1 = -\frac{\overline{\mathfrak{A}_1}'}{dn^2\, u \cos^2\vartheta}; \qquad \mathfrak{B}'_1 = \frac{\overline{\mathfrak{B}_1}'}{dn^2\, u \cos^2\vartheta}; \qquad \mathfrak{C}'_1 = \frac{\overline{\mathfrak{C}'_1}}{\cos^2\vartheta};$$

$$\overline{\mathfrak{A}'_1} = e\varkappa \cos^2\vartheta\,(1-2\,sn^2\,u+\varkappa^2\,sn^4\,u) + \varepsilon\, b'\varkappa'\, cn\, u \cos\vartheta + \varepsilon\, b'\varkappa'\, sn\, u\, dn\, u \sin\vartheta\vartheta'$$

$$\overline{\mathfrak{B}'_1} = \varkappa^2 b\, sn\, u\, cn\, u \cos^2\vartheta + \varepsilon\, b'\varkappa'^2\, sn\, u \cos\vartheta - \varepsilon\, b'\, cn\, u\, dn\, u \sin\vartheta\vartheta'$$

$$\overline{\mathfrak{C}'_1} = \sqrt{k}\,\vartheta'.$$

$$\mathfrak{A}'_2 = \frac{\overline{\mathfrak{A}'_2}}{dn^2\, u \cos^2\vartheta}; \qquad \mathfrak{B}'_2 = \frac{\overline{\mathfrak{B}'_2}}{dn^2\, u \cos^2\vartheta}; \qquad \mathfrak{C}'_2 = -\frac{\overline{\mathfrak{C}'_2}}{\cos^2\vartheta};$$

$$\overline{\mathfrak{A}'_2} = \varepsilon\, b'\varkappa'\, cn\, u \sin\vartheta \cos\vartheta + a'\varkappa'^2\, sn\, u \cos^2\vartheta + \varepsilon\, b'\varkappa' sn\, u\, dn\, u\, \vartheta'$$

$$\overline{\mathfrak{B}'_2} = a'\varkappa'\, cn\, u \cos^2\vartheta - \varepsilon\, b'\varkappa'^2\, sn\, u \sin\vartheta \cos\vartheta + \varepsilon\, b'\, cn\, u\, dn\, u\, \vartheta'$$

$$\overline{\mathfrak{C}'_2} = \sqrt{k} \sin\vartheta\vartheta'.$$

Wir bilden noch mit Hilfe der Gleichungen (6) in § 1

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \varphi'; \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = f'$$

und schreiben $\varphi' = a\,\mathfrak{D}_1 + l\,\mathfrak{E}_1 + \lambda\,\mathfrak{F}_1$,

$$\mathfrak{D}_1 = -\frac{\overline{\mathfrak{D}_1}}{dn\, u \cos^2\vartheta}; \qquad \mathfrak{E}_1 = \frac{\overline{\mathfrak{E}_1}}{\varrho\, dn\, u \cos^2\vartheta}; \qquad \mathfrak{F}_1 = \frac{\overline{\mathfrak{F}_1}}{\varrho \cos^2\vartheta};$$

$$\overline{\mathfrak{D}_1} = \varepsilon\,\varkappa' b'\, sn\, u \sin\vartheta\vartheta'$$

$$\overline{\mathfrak{E}_1} = a\sqrt{k}\; dn^3\, u \sin\vartheta \cos\vartheta - \varepsilon\, b'\,\varrho\, cn\, u \sin\vartheta\vartheta'$$

$$\overline{\mathfrak{F}_1} = \varepsilon\, ab'\, cn\, u\, dn\, u \cos\vartheta - ab\, dn\, u \cos^2\vartheta + \sqrt{k}\,\varrho\,\vartheta';$$

ebenso sei $f' = a\,\mathfrak{D}_2 + l\,\mathfrak{E}_2 + \lambda\,\mathfrak{F}_2$,

$$\mathfrak{D}_2 = \frac{\overline{\mathfrak{D}_2}}{dn\, u \cos^2\vartheta}; \qquad \mathfrak{E}_2 = -\frac{\overline{\mathfrak{E}_2}}{\varrho\, dn\, u \cos^2\vartheta}; \qquad \mathfrak{F}_2 = -\frac{\overline{\mathfrak{F}_2}}{\varrho \cos^2\vartheta};$$

$$\overline{\mathfrak{D}_2} = \varepsilon\, b'\varkappa'\, sn\, u\, \vartheta'$$

$$\overline{\mathfrak{E}_2} = a\sqrt{k}\, dn^3\, u \cos\vartheta - \varepsilon\, b'\, cn\, u\,\varrho\,\vartheta'$$

$$\overline{\mathfrak{F}_2} = a'b\, sn\, u\, dn\, u \cos^2\vartheta + \varepsilon\, ab'\, cn\, u\, dn\, u \sin\vartheta \cos\vartheta + \sqrt{k} \sin\vartheta\,\varrho\,\vartheta'.$$

Man erhält die abwickelbaren Linienflächen der Strahlenkongruenz S, wenn man die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi' & f & f' \\ \chi' & g & g' \\ \psi' & h & h' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{setzt.}^{1})$$

Dies ergibt eine Differentialgleichung für ϑ; für die Lösungen ϑ dieser Differentialgleichung stellen die Formeln (A) und (B) abwickelbare Linienflächen dar.

Die Ausrechnung ergibt:

$$\text{(C)} \qquad \begin{aligned} \Delta = {} & \mathfrak{D}_1 (\mathfrak{B}_2\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{C}_2\mathfrak{E}_2) + \mathfrak{E}_1 (\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{F}_2) \\ & + \mathfrak{F}_1 (\mathfrak{A}_2\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2) = \text{I} + \text{II} + \text{III} = 0. \end{aligned}$$

Mit Hülfe der oben berechneten Größen können wir die drei Summanden auf gleiche Nenner bringen und erhalten:

$$\text{I} = \mathfrak{D}_1(\mathfrak{B}_2\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{C}_2\mathfrak{E}_2) = \frac{\overline{\mathfrak{D}_1}\,\varrho\,(\overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{F}_2} + \overline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{E}_2})}{dn^2u\,\varrho^2\cos^5\vartheta}$$

$$\text{II} = \mathfrak{E}_1(\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{F}_2) = \frac{-\overline{\mathfrak{E}_1}(\overline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2}\,\varrho + \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{F}_2})}{dn^2u\,\varrho^2\cos^5\vartheta}$$

$$\text{III} = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{A}_2\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2) = \frac{\overline{\mathfrak{F}_1}(\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{E}_2} - \overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2}\,\varrho)}{dn^2u\,\varrho^2\cos^5\vartheta}.$$

Da wir den Fall $\cos\vartheta = 0$ ausgeschlossen haben, können wir Δ schreiben:

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} & \Delta = \\ & \overline{\mathfrak{D}_1}\varrho(\overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{F}_2} + \overline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{E}_2}) - \overline{\mathfrak{E}_1}(\overline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2}\,\varrho + \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{F}_2}) + \overline{\mathfrak{F}_1}(\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{E}_2} - \overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2}\,\varrho) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Zur leichteren Berechnung dieses Ausdrucks führen wir noch folgende Anordnung ein:

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{D}_1}\varrho &= a\,dn\,u\cos\vartheta\,\mathfrak{D}^* + \varrho\,\vartheta'\,D \\ -\overline{\mathfrak{E}_1} &= a\,dn\,u\cos\vartheta\,\mathfrak{E}^* + \varrho\,\vartheta'\,E \\ \overline{\mathfrak{F}_1} &= a\,dn\,u\cos\vartheta\,\mathfrak{F}^* + \varrho\,\vartheta'\,F. \end{aligned}$$

---

1) Nach Scheffers: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie I, 2. Aufl. Seite 369.

Darin ist

$$\mathfrak{D}^*=0 \qquad D=\varepsilon\,\varkappa' b'\,sn\,u\sin\vartheta$$
$$\mathfrak{E}^*=-\sqrt{k}\,dn^2\,u\sin\vartheta \qquad E=\varepsilon\,b'\,cn\,u\sin\vartheta$$
$$\mathfrak{F}^*=\varepsilon\,b'\,cn\,u-b\cos\vartheta \qquad F=\sqrt{k};$$

entsprechend sei gesetzt:

$$\overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{F}_2}=a\,dn\,u\cos\vartheta\,\mathfrak{G}^*+\varrho\,\vartheta' G$$
$$\overline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{E}_2}=a\,dn\,u\cos\vartheta\,\mathfrak{H}^*+\varrho\,\vartheta' H$$
$$\overline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2}\,\varrho=a\,dn\,u\cos\vartheta\,\mathfrak{J}^*+\varrho\,\vartheta' I$$
$$\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{F}_2}=a\,dn\,u\cos\vartheta\,\mathfrak{K}^*+\varrho\,\vartheta' K$$
$$\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{E}_2}=a\,dn\,u\cos\vartheta\,\mathfrak{L}^*+\varrho\,\vartheta' L$$
$$-\overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2}\varrho=a\,dn\,u\cos\vartheta\,\mathfrak{M}^*+\varrho\,\vartheta' M$$

$$\mathfrak{G}^*=[a'\varkappa'\,sn\,u\cos\vartheta+\varepsilon\,b'\,cn\,u\sin\vartheta]^2$$
$$\mathfrak{H}^*=k\,dn^2\,u$$
$$\mathfrak{J}^*=0$$
$$\mathfrak{K}^*=\varkappa'\,sn\,u\,cn\,u[a'^2\cos^2\vartheta-b'^2\sin^2\vartheta]$$
$$+\varepsilon\,a'b'\sin\vartheta\cos\vartheta\,[1-2\,sn^2\,u+\varkappa^2\,sn^2\,u]$$
$$\mathfrak{L}^*=a'\sqrt{k}\,cn\,u\,dn^2\,u\cos\vartheta-\varepsilon\,b'\varkappa'\sqrt{k}\,sn\,u\,dn^2\,u\sin\vartheta$$
$$\mathfrak{M}^*=0$$

$$G=\sqrt{k}\sin\vartheta\,[a'\varkappa'\,sn\,u\cos\vartheta+\varepsilon\,b'\,cn\,u\sin\vartheta]$$
$$H=-\varepsilon\,b'\,\sqrt{k}\,cn\,u$$
$$I=\varepsilon\,b'\varkappa'\,\sqrt{k}\,sn\,u$$
$$K=\sqrt{k}\sin\vartheta\,[a'\,cn\,u\cos\vartheta-\varepsilon\,b'\,\varkappa'\,sn\,u\sin\vartheta]$$
$$L=-\varepsilon\,a'\,b'\,cn^2\,u\cos\vartheta+b'^2\varkappa'\,sn\,u\,cn\,u\sin\vartheta$$
$$M=-\varepsilon\,a'\,b'\,\varkappa'^2\,sn^2\,u\cos\vartheta-b'^2\varkappa'\,sn\,u\,cn\,u\sin\vartheta.$$

Wir bilden die Summen:

$$\mathfrak{G}^*+\mathfrak{H}^*=[a'\varkappa'\,sn\,u\cos\vartheta+\varepsilon\,b'\,cn\,u\sin\vartheta]^2+k\,dn^2\,u$$
$$\mathfrak{J}^*+\mathfrak{K}^*=\varkappa'\,sn\,u\,cn\,u[a'^2\cos^2\vartheta-b'^2\sin^2\vartheta]+$$
$$+\varepsilon\,a'b'\sin\vartheta\cos\vartheta[1-2\,sn^2\,u+\varkappa^2 sn^2 u]$$
$$\mathfrak{L}^*+\mathfrak{M}^*=a'\sqrt{k}\,cn\,u\,dn^2\,u\cos\vartheta-\varepsilon\,b'\varkappa'\sqrt{k}\,sn\,u\,dn^2\,u\sin\vartheta$$
$$G+H=\cos\vartheta\,[a'\varkappa'\,\sqrt{k}\,sn\,u\sin\vartheta-\varepsilon\,b'\sqrt{k}\,cn\,u\cos\vartheta]=\cos\vartheta(\overline{G+H})$$
$$I+K=\cos\vartheta\,[a'\,\sqrt{k}\,cn\,u\sin\vartheta+\varepsilon\,b'\varkappa'\sqrt{k}\,sn\,u\cos\vartheta]=\cos\vartheta\,(\overline{I+K})$$
$$L+M=-\cos\vartheta\,\varepsilon\,a'b'\,dn^2\,u \qquad =\cos\vartheta(\overline{L+M}).$$

Bezeichnen wir nun in Gleichung (D) die drei Summanden mit I′, II′, III′, so ist:

$$I' = [a\,dn\,u\cos\vartheta\mathfrak{D}^* + \varrho\,\vartheta' D][a\,dn\,u\cos\vartheta(\mathfrak{G}^* + \mathfrak{H}^*) + \\ + \varrho\,\vartheta'\cos\vartheta(\overline{G+H})] = \cos\vartheta[a^2 dn^2 u\cos\vartheta\,\mathfrak{D}^*(\mathfrak{G}^* + \mathfrak{H}^*) + \\ + a\,dn\,u\,\varrho\,\vartheta'\{\mathfrak{D}^*(G+H) + D(\mathfrak{G}^* + \mathfrak{H}^*)\} + \varrho^2\vartheta'^2 D(\overline{G+H})]$$

Entsprechende Ausdrücke erhalten wir für II′ und III′. Sei nun gesetzt:

$$\mathfrak{D}^*(\mathfrak{G}^* + \mathfrak{H}^*) = \Xi_1; \quad \mathfrak{D}^*(G+H) + D(\mathfrak{G}^* + \mathfrak{H}^*) = H_1$$
$$\mathfrak{E}^*(\mathfrak{J}^* + \mathfrak{K}^*) = \Xi_2; \quad \mathfrak{E}^*(I+K) + E(\mathfrak{J}^* + \mathfrak{K}^*) = H_2$$
$$\mathfrak{F}^*(\mathfrak{L}^* + \mathfrak{M}^*) = \Xi_3; \quad \mathfrak{F}^*(L+M) + F(\mathfrak{L}^* + \mathfrak{M}^*) = H_3$$
$$D(\overline{G+H}) = Z_1; \qquad \Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3 = \Xi$$
$$E(\overline{I+K}) = Z_2; \qquad H_1 + H_2 + H_3 = H$$
$$F(\overline{L+M}) = Z_3; \qquad Z_1 + Z_2 + Z_3 = Z.$$

Hiernach können wir nun endlich die Differentialgleichung (D) schreiben:

$$\cos\vartheta\{a^2 dn^2 u\cos\vartheta\,\Xi + a\,dn\,u\,\varrho\,\vartheta' H + \varrho^2\vartheta'^2 Z\} = 0.$$

Der Fall $\cos\vartheta = 0$ ist oben ausgeschlossen worden. Somit bleibt:

$$\varrho^2\vartheta'^2 Z + a\,dn\,u\,\varrho\,\vartheta' H + a^2 dn^2 u\cos\vartheta\,\Xi = 0,$$

woraus folgt:

$$\vartheta' = -\frac{a\,dn\,u(H \pm \sqrt{H^2 - 4\cos\vartheta\,\Xi Z})}{2\varrho Z}.$$

Man findet

$$\Xi = \sqrt{k}\,dn^2 u\cos\vartheta\{\varepsilon\,a'b'cn^2 u\cos^2\vartheta + \varepsilon\,a'b'\varkappa'^2 sn^2 u\sin^2\vartheta \\ - (a'^2 + b'^2)\varkappa' sn\,u\,cn\,u\sin\vartheta\cos\vartheta - a'b\,cn\,u\cos\vartheta + \\ + \varepsilon\,bb'\varkappa' sn\,u\sin\vartheta\}$$
$$H = dn^2 u\cos^2\vartheta\{\varepsilon b'\varkappa'(a'^2 - k)sn\,u\sin\vartheta - a'(b'^2 - k)cn\,u\cos\vartheta + \varepsilon\,a'bb'\}$$
$$Z = -\varepsilon\sqrt{k}\,a'b'\,dn^2 u\cos^2\vartheta.$$

Ausrechnung ergibt:

$$\sqrt{H^2 - 4\cos\vartheta\,\Xi Z} = \\ \pm dn^2 u\cos^2\vartheta\{\varepsilon b'\varkappa'(a'^2 + k)sn\,u\sin\vartheta - a'(b'^2 + k)cn\,u\cos\vartheta + \varepsilon\,a'bb'\}.$$

Die obige Differentialgleichung zerfällt in folgende zwei:

$$\text{(I)} \qquad \vartheta' = \frac{a\,dn\,u(b + a'\varkappa'\,sn\,u\sin\vartheta - \varepsilon\,b'\,cn\,u\cos\vartheta)}{\varrho\sqrt{k}}$$

und

$$\text{(II)} \qquad \vartheta' = -\frac{a\sqrt{k}\, dn\, u\,(\varepsilon\, b' \varkappa'\, sn\, u \sin\vartheta - a'\, cn\, u \cos\vartheta)}{\varepsilon\, a'\, b'\, \varrho}.$$

Die beiden Gleichungen (I) und (II) verbunden mit der Gleichung (A) definieren die abwickelbaren Linienflächen der Strahlenkongruenz S; und zwar erhalten wir je zwei Scharen solcher Flächen: zwei durch (I) und (II) definierte für die durch die Geraden v_0 ($\varepsilon = +1$) und zwei für die durch die Geraden u_0 ($\varepsilon = -1$) erzeugte Kongruenz.

Es mögen nun die Gratlinien dieser abwickelbaren Flächen bestimmt werden, die auf der Gesimsfläche Σ, dem ersten Brennmantel unseres Strahlensystems liegen.

Von einer Linienfläche, die durch die Gleichung (A): $\mathfrak{x} = x + \alpha\,\mathfrak{A} + l\,\mathfrak{B} + \lambda\,\mathfrak{C}$ definiert ist, gehört zu jeder besonderen Lage der Quadrik Q', also auch der konfokalen Ellipse C', ein Strahl. Der Schnittpunkt dieses Strahles mit der Ellipse C' ist ein Punkt auf der Gesimsfläche Σ und damit ein Punkt der Gratlinie, die wir suchen. Die Punkte jeder speziellen Lage der Ellipse C' sind aber dadurch ausgezeichnet, daß ihre z_0-Koordinate gleich Null ist (siehe Figur S. 29). Hiernach erhalten wir die Gratlinie der Linienfläche $\mathfrak{x} = x + \alpha\,\mathfrak{A} + l\,\mathfrak{B} + \lambda\,\mathfrak{C}$, wenn wir den Koeffizienten von λ gleich Null setzen.

$$\mathfrak{C} = 0.$$

Daraus folgt $$\tau_1 = \sin\vartheta.$$

Wir können nun in die Gleichung (A) den gefundenen Wert für τ_1 einführen. In Verbindung mit den Differentialgleichungen (I) und (II) stellt diese dann sowohl für die durch $\varepsilon = +1$ als $\varepsilon = -1$ charakterisierte Strahlenkongruenz zwei Scharen konjugierter Kurven dar. Aber nur die eine Schar dieser auf Σ gelegenen Kurven besteht aus den Gratlinien der Linienflächen. Die anderen, konjugierten Kurven sind die Schnittkurven der anderen Schar von Linienflächen, die ihre Gratlinien auf dem, hier nicht dargestellten, zweiten Brennmantel des Strahlensystems besitzen. Die Gratlinien sind nun nach Bianchi die gesuchten transformierten windschiefen Ellipsen.

Die gesuchten Gratlinien haben mit ihren Konjugierten die Gleichung (A) gemeinsam, wenn darin $\sin\vartheta$ für τ_1 gesetzt wird. Es gehört zu jeder Kurvenschar eine bestimmte der beiden Differentialgleichungen (I) und (II), worüber später entschieden werden soll. Wir setzen in (A) $\tau_1 = \sin\vartheta$ und erhalten

$$\text{(III)} \qquad \xi = x - a\,\frac{c\varkappa\, sn\,u\, cn\,u + a'\, cn\,u \sin\vartheta + \varepsilon\, b'\varkappa'\, sn\,u\cos\vartheta}{dn\,u} + l\,\frac{b + a'\varkappa'\, sn\,u\sin\vartheta - \varepsilon\, b'\, cn\,u\cos\vartheta}{dn\,u}.$$

Um nun zu entscheiden, welche von den beiden Differentialgleichungen (I) und (II) zu den gesuchten Gratlinien und welche zu deren Konjugierten gehört, geht man zu dem Grenzfall B_{b^2} der Transformation über. Hier geht das Strahlensystem S in die Tangenten an die einzelnen Lagen der Fokalhyperbel $\overline{C}$ über, die beim Abrollen den zweiten Brennmantel K beschreibt (S. 14); der andere Brennmantel, auf dem die Gratlinien liegen, ist dann die Linienfläche Σ', welche abwickelbar ist. Auf einer abwickelbaren Fläche hat aber der Begriff der konjugierten Kurven keinen Sinn. Die eine Schar von abwickelbaren Linienflächen geht hier in die Ebenen der einzelnen Lagen der Hyperbel $\overline{C}$ über und schneidet Σ' längs der Fokalachsen A. Die andere Schar der Abwickelbaren besitzt auf Σ' die gesuchten Gratlinien. Nach dieser geometrischen Überlegung führen wir in (I) und (II) ein: $k = b^2$.

(I) wird dann

$$\text{(Ia)} \qquad \vartheta' = \frac{a\, dn\,u}{\varrho}\,[1 + \varkappa\, sn\,u\sin\vartheta].$$

(II) ergibt $\qquad \vartheta' = \infty.$

Die zweite Differentialgleichung versagt. Dieser Fall läßt sich analytisch erklären dadurch, daß im Grenzfall $k = b^2$ durch Verschwinden der Größe Z die ursprüngliche Differentialgleichung linear wird und so nur die eine Lösung (Ia) haben kann. Geometrisch wird der Umstand plausibel dadurch, daß der in (I) und (II) enthaltene Begriff der konjugierten Kurven auf der hier auftretenden abwickelbaren Fläche Σ' seine Be-

deutung verliert. Diese Betrachtungen weisen darauf hin, daß nur die Differentialgleichung (I) verbunden mit der Gleichung (III) Gratlinien darstellt. Der vollständige Beweis hierfür wird im folgenden Paragraphen erbracht dadurch, daß wir die Formeln (I) und (III) mittels einer geeigneten Substitution in die Bianchischen Endformeln überführen.

§ 4.
Transformierte windschiefe Ellipsen.

Die Gratlinien, deren Gleichungen wir soeben gefunden haben, sind nach dem in der Einleitung angegebenen Satz II von Bianchi wieder windschiefe Ellipsen, und zwar sind sie isometrisch mit dem ursprünglich gegebenen windschiefen Kegelschnitt Γ. Das Ziel der Untersuchungen in diesem Paragraphen ist nun, diese Behauptungen direkt zu beweisen. Durch Aufstellung der natürlichen Gleichungen wird dies gelingen. Bei dieser Gelegenheit wird sich auch der Zusammenhang unserer Formeln mit denen bei Bianchi enthüllen. Betrachtungen über die Lösbarkeit der Differentialgleichung (I) schließen dann die Untersuchungen über die Bianchische Transformation der windschiefen Ellipse.

Zuerst seien noch einmal die Formeln zusammengestellt für die transformierten windschiefen Ellipsen Γ':

A. Windschiefe Ellipsen, erhalten durch den allgemeinen Fall B_k der Transformation:

$$\text{(III)} \qquad \xi = x - a\,\frac{e\varkappa\, sn\,u\, cn\,u + a'\, cn\,u \sin\vartheta + \varepsilon\, b'\varkappa'\, sn\,u\cos\vartheta}{dn\,u} + l\,\frac{b + a'\varkappa'\, sn\,u\sin\vartheta - \varepsilon\, b'\, cn\,u\cos\vartheta}{dn\,u}$$

$$\text{(I)} \qquad \vartheta' = \frac{a\, dn\,u\,(b + a'\varkappa'\, sn\,u\sin\vartheta - \varepsilon\, b'\, cn\,u\cos\vartheta)}{\varrho\sqrt{k}}.$$

Wir erhalten hier zwei Scharen von Kurven, indem wir einmal ε den Wert $+1$, dann -1 beilegen. Im Grenzfall B_{k^2} fallen die beiden Strahlenkongruenzen ($\varepsilon = +1$) und ($\varepsilon = -1$) in eine zusammen; hier resultiert nur eine Schar von Kurven Γ'.

B. Grenzfall B_{b^2}.

(IIIa) $$\xi = x - a\frac{e\,cn\,u}{dn\,u}[\varkappa\,sn\,u + \sin\vartheta] + l\frac{b}{dn\,u}[1 + \varkappa\,sn\,u\sin\vartheta]$$

(Ia) $$\vartheta' = \frac{a\,dn\,u}{\varrho}[1 + \varkappa\,sn\,u\sin\vartheta].$$

Wegen der leichteren Rechnung beschäftigen wir uns zunächst nur mit den Formeln dieses Grenzfalles B_{b^2}. Unsere Absicht ist, die natürlichen Gleichungen der dadurch definierten Kurven Γ' aufzustellen. Wir bilden mit Hilfe der Formeln (6) in § 1 die Ableitung von ξ nach u:

$$\xi' = \alpha\,\mathfrak{A}_3 + l\,\mathfrak{B}_3 + \lambda\,\mathfrak{C}_3,$$

wobei ist:

$$\mathfrak{A}_3 = -\frac{e\,cn\,u\cos\vartheta\vartheta'}{dn\,u};\quad \mathfrak{B}_3 = \frac{b\,\varkappa\,sn\,u\cos\vartheta\vartheta'}{dn\,u};\quad \mathfrak{C}_3 = -a\varkappa'\vartheta'.$$

Unter Benutzung der Differentialgleichung (Ia) erhalten wir daraus:

$$\frac{ds_3}{du} = a\,\vartheta'\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\vartheta},$$

s_3 bedeutet die Bogenlänge der Kurve Γ'.

Wir können schreiben:

(1) $$\frac{ds_3}{d\vartheta} = +\,a\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\vartheta}$$

$$s_3 = a\int\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\vartheta}\,d\vartheta.$$

Dies ist eine regelrechte Ellipsenformel, ganz entsprechend der in § 1 für die ursprüngliche windschiefe Ellipse Γ entwickelten.

Wir betrachten nun das elliptische Integral

$$\Theta = \int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\vartheta}}$$ und bilden:

$$\sin\vartheta = sn\,\Theta;\quad \cos\vartheta = cn\,\Theta;\quad \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\vartheta} = dn\,\Theta.$$

Ferner ist $d\vartheta = dn\,\Theta\,d\,\Theta$.

Unverändert bleibt $\varkappa = \frac{e}{a};\quad \varkappa' = \frac{b}{a}$.

Diese neuen Größen werden in die Differentialgleichung (Ia) eingeführt und formen sie um zu

$$\frac{d\,\Theta}{du} = \frac{a\,dn\,u\,(1+\varkappa\,sn\,u\,sn\,\Theta)}{\varrho\,dn\,\Theta}.$$

Für die Richtungskosinus der Tangente an Γ' erhält man:

$$\alpha_3 = -\alpha\,\frac{\varkappa\,cn\,u\,cn\,\Theta}{dn\,u\,dn\,\Theta} + l\,\frac{\varkappa\varkappa'\,sn\,u\,cn\,\Theta}{dn\,u\,dn\,\Theta} - \lambda\,\frac{\varkappa'}{dn\,\Theta}.$$

Nun bilden wir $\frac{d\,\alpha_3}{ds_3}$. Nach umständlicher Rechnung resultiert:

$$\frac{d\,\alpha_3}{ds_3} = \alpha\,\frac{\varkappa\varkappa'^2\,sn\,\Theta\,cn\,u}{a\,dn\,u\,dn^4\,\Theta}$$
$$- l\,\frac{\varkappa'\,[\varkappa\varkappa'^2\,sn\,u\,sn\,\Theta\,(1+\varkappa\,sn\,u\,sn\,\Theta) + dn^2\,u\,dn^2\,\Theta]}{a\,dn\,u\,dn^4\,\Theta\,(1+\varkappa\,sn\,u\,sn\,\Theta)}$$
$$- \lambda\,\frac{\varkappa\varkappa'\,cn\,\Theta\,[sn\,u\,dn^2\,\Theta + \varkappa\,sn\,\Theta\,(1+k\,sn\,u\,sn\,\Theta)]}{a\,dn^4\,\Theta\,(1+\varkappa\,sn\,u\,sn\,\Theta)}$$

und entsprechend $\frac{d\,\beta_3}{ds_3}$, $\frac{d\,\gamma_3}{ds_3}$.

Nun ist $$+\sqrt{\left(\frac{d\,\alpha_3}{ds_3}\right)^2 + \left(\frac{d\,\beta_3}{ds_3}\right)^2 + \left(\frac{d\,\gamma_3}{ds_3}\right)^2} = \frac{1}{r_3}.$$

Es resultiert:

(3) $$r_3 = \frac{a^2\,dn^3\,\Theta}{b}.$$

Diese Formel für den Krümmungsradius der Kurve Γ' entspricht genau der in § 1 entwickelten (2) für den Krümmungsradius der windschiefen Ellipse Γ.

Die Kurve Γ' ist windschiefe Ellipse wie Γ und aus dieser durch die Bianchische Transformation hervorgegangen. Hiermit ist der Satz III durch vollständige Durchführung der Rechnung verifiziert.

Wir wenden uns jetzt zu einer Betrachtung der Resultate bei Bianchi. Um Verwechslungen vorzubeugen, bezeichnen wir die dort auftretenden Variabeln u, v durch die entsprechenden großen Buchstaben U, V.

Die Formel für den Krümmungsradius auf Seite 335 (27) für die windschiefe Ellipse Γ

$$\varrho = \frac{R^3}{ab} \text{ ist identisch mit unserer}$$

$$r = \frac{a^2\, dn^3\, u}{b} \quad (2) \text{ in } \S\ 1.$$

Somit ist $R = a\, dn\, u = \sqrt{a^2 \sin^2 U + b^2 \cos^2 U}$.

Ebenso entsprechen sich die Formeln für den Krümmungsradius von Γ'

$$\varrho' = \frac{R'^3}{ab}$$

in Lezioni III, Seite 337 und

$$r_3 = \frac{a^2\, dn^3\, \Theta}{b}; \quad R' = a\, dn\, \Theta = \sqrt{a^2 \sin^2 V + b^2 \cos^2 V}.$$

Wir finden so, daß ist:

$$(4) \qquad \begin{cases} sn\, u = -\cos U; \quad cn\, u = \sin U \\ \sin\vartheta = sn\, \Theta = \cos V; \quad \cos\vartheta = cn\, \Theta = \sin V \\ \dfrac{d\vartheta}{dn\, u\, du} = -\dfrac{dV}{dU}. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Substitution ist es möglich, alle hier entwickelten Formeln in die entsprechenden bei Bianchi überzuführen und umgekehrt.

Bei Bianchi Seite 340 steht die unserer (Ia) entsprechende Differentialgleichung

$$\frac{dV}{dU} = \frac{a(1 - e\cos U \cos V)}{T}.$$

Das hier auftretende e ist gleich unserm $\varkappa$.

$$\frac{dV}{dU} = \frac{a(1 - \varkappa \cos U \cos V)}{T}.$$

Führt man hier die Substitionen (4) ein, so geht dies über in:

$$\vartheta' = -\frac{a\, dn\, u}{T}\,[1 + \varkappa\, sn\, u \sin\vartheta],$$

Diese Gleichung stimmt schon mit unserer (Ia) überein bis auf das Vorzeichen. Diese Verschiedenheit erklärt sich dadurch, daß wir unseren Untersuchungen ein anderes Koordinatensystem zu Grunde gelegt haben als das, welches Bianchi benutzt. In unserer Arbeit ist dasselbe Koordinatensystem angewandt wie es allgemein benutzt wird in: G. Scheffers: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Durch

(4a) $$\varrho = -T$$

geht nun die Bianchische Differentialgleichung völlig in die hier abgeleitete über.

Aus der Gleichung bei Bianchi Seite 338, (32)

$$kTT' = R^2 m^2,$$

wo T' der Torsionsradius von Γ' [Fall $k = b^2$]

$$m = \frac{b(a - e\cos U\cos V)}{R}$$

ist, folgt für uns, wenn wir den Torsionsradius von Γ' mit ϱ_3 bezeichnen:

(5) $$\varrho_3 = \frac{a^2(1 + \varkappa\, sn\, u \sin\vartheta)^2}{\varrho}.$$

Für den Grenzfall B_{b^2} haben wir so unsere Formeln mit den Bianchischen übereinstimmend gefunden; wir können beide Formelsysteme in einander überführen durch die Substitutionen (4) und (4a). Dies gilt auch für den allgemeinen Fall, wie einfaches Nachrechnen zeigt. Durch die Übereinstimmung der Endresultate auf beiden Seiten ist nun auch der allgemeine Satz II bewiesen.

Unsere Differentialgleichung (I) und ebenso (Ia) ist eine Riccatische. Sie ist allgemein nicht auflösbar, zumal da sie die Funktion ϱ enthält, die in jedem Spezialfall eine beliebige Gestalt annehmen kann. Doch können wir beliebig viele Spezialfälle konstruieren, in denen partikuläre Lösungen bekannt sind.

In der Differentialgleichung (I) nehmen wir für ϑ irgend eine spezielle differentiierbare Funktion $\vartheta_1(u)$ an. Dieses ϑ_1 darf keine Konstante sein, denn diese Werte sind ausgeschlossen wie die Lösungen der Gleichung $\cos\vartheta = 0$. Jedes konstante ϑ ergibt nur Parallelkurven zu den auf S. 25 angetroffenen Filarevolventen x_n, y_n, z_n, die als transformierte windschiefe Ellipsen Γ' nicht in Frage kommen.

Die Gleichung (I) ergibt nun für den Torsionsradius ϱ der ursprünglichen windschiefen Ellipse:

$$\varrho = \frac{a\,dn\,u\,(b + a'\varkappa'\,sn\,u\sin\vartheta_1 - \varepsilon\,b'\,cn\,u\cos\vartheta_1)}{\vartheta'_1\sqrt{k}}.$$

Wird nun eine ebene Ellipse mit den Halbachsen a und b vorgelegt und wird sie nach vorstehendem Gesetz derart tordiert, daß sie eine windschiefe Ellipse wird, so ist eine ihrer Transformierten angebbar. Denn ϑ_1 ist dann partikuläre Lösung der Differentialgleichung (I).

Da nun (I) eine Riccatische Gleichung und eine partikuläre Lösung von ihr bekannt ist, so kann man durch Quadraturen auch alle übrigen finden. Somit würde es möglich sein, in unzähligen beliebigen Fällen von allen Transformierten Γ' einer gegebenen windschiefen Ellipse die endlichen Gleichungen anzugeben, wenn die Lösung einer anderen Riccatischen Gleichung möglich wäre. Denn die Forderung, die gegebene Ellipse nach dem angegebenen Gesetz zu tordieren, kann nur durch Auflösung einer Riccatischen Gleichung erfüllt werden; eine Kurve, deren natürliche Gleichungen gegeben sind, wird erst durch Lösung einer Riccatischen Gleichung und durch Quadraturen in endlicher Form gefunden.

§ 5.

Transformation des windschiefen Kreises.

Aus den Formeln für die transformierte windschiefe Ellipse lassen sich leicht solche für den transformierten

windschiefen Kreis ableiten. Wir müssen nur überall setzen

$$b = r = a,$$

sodaß wird $\varkappa = 0$, $\varkappa' = 1$. Ferner wird, nach (3) S. 20,

$$dn\, u = 1$$
$$sn\, u = \sin T$$
$$cn\, u = \cos T.$$

Die Gleichung für den transformierten windschiefen Kreis für den allgemeinen Fall B_k läßt sich dann schreiben:

$$\mathfrak{x} = x - a\, a' \sin(\vartheta + \varepsilon T) + l[a - a' \cos(\vartheta + \varepsilon T)],$$

und die zugehörige Differentialgleichung:

$$\vartheta' = \frac{a}{\varrho\sqrt{k}}[a - a' \cos(\vartheta + \varepsilon T)].$$

Wenden wir uns nun zum Grenzfall $B_a{}^2$. Wir setzen $k = a^2$, sodaß $a' = 0$. Dann wird

$$\mathfrak{x} = x + al$$
$$\vartheta' = \frac{a}{\varrho}.$$

Die Gleichung (5) auf S. 44 geht über in

$$\varrho\, \varrho_3 = a^2,$$

das Produkt der Torsionen ist konstant.

Dies Resultat läßt sich auch rein geometrisch herleiten.[1]) Im Grenzfall des windschiefen Kreises degeneriert die Fokalhyperbel $\overline{C}$ in die Gerade, die im Zentrum O des Kreises C senkrecht zu seiner Ebene steht. Das ganze Strahlensystem degeneriert in die von dieser Geraden beschriebene abwickelbare Fläche, die Polarfläche des ursprünglichen windschiefen Kreises Γ. Die Gratlinie Γ'' ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte von Γ. Γ'' hat dieselbe konstante Krümmung $\frac{1}{a}$ wie Γ. Γ'' ist demnach der Ort der Krümmungsmittelpunkte O. Hieraus erhalten wir als endliche Gleichung für den gesuchten transformierten windschiefen Kreis Γ' im Fall $B_a{}^2$

$$\mathfrak{x} = x + al.$$

1) Bianchi, Lezioni III, S. 341.

Abschnitt II.

Transformation der windschiefen Hyperbel.

§ 1.

Formeln für die windschiefen Hyperbeln Γ, die durch Torsion aus einer ebenen C hervorgehen.

Die Entwicklungen für die windschiefe Hyperbel sind ganz analog denen bei der windschiefen Ellipse. Wir gehen aus von einer ebenen Hyperbel C mit den Halbachsen a und b und berechnen ihre Bogenlänge s und den Krümmungsradius r, die sie in entsprechenden Punkten mit allen windschiefen Hyperbeln gemeinsam hat, die durch Torsion aus ihr erzeugt werden,

Die Gleichungen der Kurve C schreibt man zweckmäßig:

$$x = \frac{a}{\sin\varphi}; \quad y = -b\operatorname{cotg}\varphi. \quad ^{1})$$

Dann ist, wenn wir bezeichnen

$$a^2+b^2=e^2$$

$$\varkappa = \frac{a}{e}; \quad \varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2} = \frac{b}{e},$$

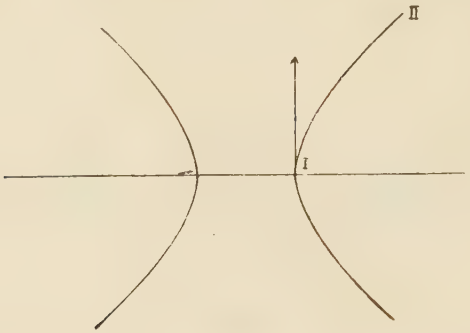
$$(1) \qquad ds = \frac{-e\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}\,d\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Wir haben hier das negative Vorzeichen eingeführt, um zu erreichen, daß die Bogenlänge s der Hyperbel im

1) Der Zusammenhang mit der Variabeln t bei Kößler (S. 19) ist gegeben durch:

$$\sin t = +i\operatorname{cotg}\varphi; \quad \cos t = \frac{1}{\sin\varphi}.$$

ersten Quadranten wächst in der Richtung I II; s wächst, während φ abnimmt.



Der dem Wert $\varphi = 0$ entsprechende Hyperbelpunkt liegt im ersten Quadranten im Unendlichen; der der Größe $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist der Punkt I. φ wächst demnach von II bis I. Durch die Einführung des negativen Vorzeichens in (1) ist daher festgesetzt, daß s in der Richtung von I nach II wächst.

Nun definieren wir u derart, daß:

$\sin\varphi = sn\,u$, $\cos\varphi = cn\,u$, $\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi} = dn\,u$ und $d\varphi = dn\,u\,du$.

Man berechnet den Krümmungsradius r von C:

$$(2) \qquad r = +\frac{e^3}{ab}\frac{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}^3}{\sin^3\varphi} = \frac{e^3}{ab}\frac{dn^3\,u}{sn^3\,u}.$$

Wir kommen jetzt zur Betrachtung des Kontingenzwinkels dT. Nach den getroffenen Festsetzungen nimmt T im ersten Quadranten ab, während s wächst. Im Punkt I ist

$$s = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2},\ T = \frac{\pi}{2}.$$

Da r stets als positive Größe angesehen wird, muß gesetzt werden:

$$-\frac{dT}{ds} = \frac{1}{r}.$$

Dann ist

$$-\frac{dT}{d\varphi} = \frac{1}{r}\frac{ds}{d\varphi} \quad \text{oder} \quad dT = \varkappa\varkappa'\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi};$$

Integration ergibt: $T - C = \operatorname{arc\,cotg}\left(\frac{a}{b}\cos\varphi\right)$.

Zur Bestimmung der Integrationskonstante C dient die vorausgeschickte geometrische Betrachtung, welche für Punkt I ergab $T=\varphi$ Daher ist $C=0$ und $b\operatorname{cotg} T=a\cos\varphi=a\,cn\,u$.

Wir finden hieraus

$$(3)\qquad \begin{cases} \sin T=\dfrac{x'}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}=\dfrac{x'}{dn\,u} \\ \cos T=\dfrac{x\cos\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}=\dfrac{x\,cn\,u}{dn\,u}. \end{cases}$$

Die berechneten Stücke s, r und dT haben die ebene Hyperbel C und die windschiefe Γ gemein. Wir bemerken hier die natürliche Gleichung der Hyperbel, die für C wie Γ gilt:

$$(4)\qquad \frac{ds}{dr}=\frac{1}{3\sqrt{\left[1+\left(\frac{br}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\left[\left(\frac{ar}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right]}}.$$

Zu dieser ersteren tritt für die windschiefe Hyperbel noch eine zweite natürliche Gleichung, welche ihre Torsion bestimmt:

$$\varrho=f(u).$$

Ist Γ Schraubenlinie, so ist

$$\varrho=\frac{c\,e^3}{a^3b^3}\frac{dn^3u}{sn^3u}\text{ und }\frac{r}{\varrho}=\frac{a^2b^2}{c},$$

wo c eine Konstante ist.

Aus Gleichung (1) folgt

$$\frac{ds}{d\varphi}=-\frac{e\,dn\,u}{sn^2\,u};\text{ ferner ist }\frac{d\varphi}{du}=dn\,u,$$

woraus folgt:

$$(5)\qquad \frac{ds}{du}=-\frac{e\,dn^2\,u}{sn^2\,u}.$$

Die windschiefe Hyperbel Γ habe als Koordinaten eines beliebigen Punktes x, y, z und als Richtungskosinus

der zugehörigen Tangente α β γ
der Hauptnormale l m n
und der Binormale λ μ ν.

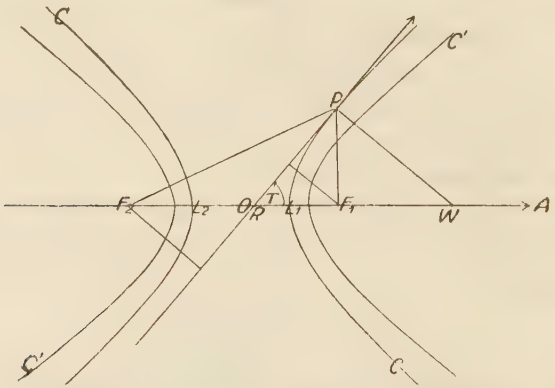
Mit Hilfe der Gleichungen (2) und (5) führen wir die Frenetschen Formeln in die folgenden über:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{du} = -\alpha e \dfrac{dn^2 u}{sn^2 u} \\ \dfrac{d\alpha}{du} = -l \varkappa \varkappa' \dfrac{sn\, u}{dn\, u} \\ \dfrac{dl}{du} = \alpha \varkappa \varkappa' \dfrac{sn\, u}{dn\, u} + \dfrac{\lambda}{\varrho} e \dfrac{dn^2 u}{sn^2 u} \\ \dfrac{d\lambda}{du} = -\dfrac{l}{\varrho} e \dfrac{dn^2 u}{sn^2 u}. \end{cases}$$

§ 2.

Die mit C beim Abrollen auf Γ verbundenen Kurven und Flächen und die Strahlenkongruenz S.

Man hat in der Figur die ebene Hyperbel C, die ihre Deformierte Γ im Punkte P berührt. PR ist ihre gemeinsame Tangente. Die Bogenlänge von C wächst in der Richtung von L_1 nach P; demnach ist RP die positive Richtung der Tangente. Die Hauptachse von C sei A genannt; auf



ihr liegen die Brennpunkte F_1, F_2, die Scheitel L_1, L_2 und der Mittelpunkt O. Die Achse A und die Tangente in P schneiden einander in R unter dem Winkel T. PW ist die Normale im Punkte P.

Rollt C auf Γ ab, so beschreibt die zu C konfokale Hyperbel C' die Gesimsfläche Σ; die Fokalachse A beschreibt die abwickelbare Linienfläche Σ' mit der Gratlinie R, dem

Ort der Punkte R. Die Scheitel-, Brenn- und Mittelpunkte erzeugen Scheitel-, Brenn- und Mittelpunktskurven.

Ihre Gleichungen lassen sich in ähnlicher Weise herleiten wie diejenigen im Falle der windschiefen Ellipse. Wir verweisen auf die Kößlersche Arbeit, wo die Ableitung gegeben wird und führen hier nur die Endresultate an. Die berichtigten Formeln lauten:

I. Brennpunktskurve F_1

$$x_1=x+\left[\frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2T-b^2\cos^2T}}-1\right]\left[-a\,e\cos T+l\sqrt{a^2\sin^2T-b^2\cos^2T}\right]$$

oder, vermöge der Relationen (3) in § 1:

$$x_1=x+\frac{e-a\,sn\,u}{e\,sn\,u\,dn\,u}(-a\,e\,cn\,u+l\,b\,sn\,u).$$

II. Brennpunktskurve F_2

$$x_2=x-\left[\frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2T-b^2\cos^2T}}+1\right]\left[a\,e\cos T+l\sqrt{a^2\sin^2T-b^2\cos^2T}\right]$$

$$x_2=x-\frac{e+a\,sn\,u}{e\,sn\,u\,dn\,u}(a\,e\,cn\,u+l\,b\,sn\,u).$$

I. Scheitelkurve L_1

$$x_3=x_1-\alpha(e-a)\cos T-l(e-a)\sin T$$

$$=x-\alpha\cos T\left[\frac{e^2\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2T-b^2\cos^2T}}-a\right]+l\left[a\sin T-\sqrt{a^2\sin^2T-b^2\cos^2T}\right]$$

$$x_3=x-\alpha\frac{cn\,u}{e\,dn\,u}\left[\frac{e^2-a^2sn\,u}{sn\,u}\right]+l\frac{ab}{e\,dn\,u}\left[1-sn\,u\right].$$

II. Scheitelkurve L_2

$$x_4=x_2+\alpha(e-a)\cos T+l(e-a)\sin T$$

$$=x-\alpha\cos T\left[\frac{e^2\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2T-b^2\cos^2T}}+a\right]-l\left[a\sin T+\sqrt{a^2\sin^2T-b^2\cos^2T}\right]$$

$$x_4=x-\alpha\frac{cn\,u}{e\,dn\,u}\left[\frac{e^2+a^2sn\,u}{sn\,u}\right]-l\frac{ab}{e\,dn\,u}\left[1+sn\,u\right].$$

Mittelpunktskurve O

$$x_5 = x - \frac{a\,e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} - l\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}$$

$$x_5 = x - a\,\frac{e\,cn\,u}{sn\,u\,dn\,u} - l\,\frac{ab\,sn\,u}{e\,dn\,u}.$$

Die Kurven x_1 bis x_5 sind Parallelkurven, Filarevolventen der Raumkurve R und zugleich Planevolventen der windschiefen Hyperbel Γ. Ihre Gleichungen genügen der allgemeinen Form:

$$x_n = x - a\,\frac{cn\,u}{e\,dn\,u}\,\frac{e^2 - a\,\tau\,sn\,u}{sn\,u} + l\,b\,\frac{\tau - a\,sn\,u}{e\,dn\,u}.$$

τ ist ein Parameter auf A, der in O gleich 0 ist und nach F_1 hin wächst. x_n ist eine allgemeine Parallelkurve der Schar, beschrieben von einem Punkte der Achse A, der von O um die Strecke τ entfernt ist.

Kurve R

Sie ist die Gratlinie der Fläche Σ'. Es ist

$$x_6 = x - PR\,a$$

$$= x - a\,\frac{b^2 \operatorname{cotg} T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}}$$

$$x_6 = x - a\,e\,\frac{cn\,u\,dn\,u}{sn\,u}.$$

Wir geben ihre Bestimmungsstücke an:

$$\frac{dx_6}{du} = \varkappa\,cn\,u\,(a\,a\,cn\,u + l\,b)$$

$$\frac{ds_6}{du} = a\,cn\,u\,dn\,u$$

$$s_6 = a\,sn\,u$$

$$\alpha_6 = \alpha\varkappa\,\frac{cn\,u}{dn\,u} + l\,\frac{\varkappa'}{dn\,u}$$

$$l_6 = \bar{\varepsilon}\,\lambda$$

$$\lambda_6 = -\varepsilon'\bar{\varepsilon}\,\frac{\alpha\varkappa' - l\varkappa\,cn\,u}{dn\,u}$$

$$r_6 = \bar{\varepsilon}\,\frac{\varkappa}{\varkappa'}\,\varrho\,sn^2 u\,cn\,u,$$

hier ist $\bar{\varepsilon} = \pm 1$ derart, daß $r_6 > 0$

$$\varrho_6 = \varepsilon'\varrho\,sn^2 u,\quad \varepsilon' = \pm 1.$$

Es ist $$\left(\frac{x'}{x}\right)^2\left(\frac{r_6}{\varrho_6}\right)^2+\left(\frac{s_6}{a}\right)^2=1.$$

Von der ebenen Hyperbel C, für die wir im § 1 eine Parameterdarstellung gegeben haben, betrachten wir jetzt die Darstellung, welche Bianchi in Lezioni III auf S. 338 gibt:

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

$$x_0=a\,ch\bar{u};\ y_0=b\,sh\bar{u};\ z_0=0.$$

An unserer Figur läßt sich das hier eingeführte Koordinatensystem folgendermaßen orientieren:

Die x_0-Achse fällt mit der Achse A zusammen; in O ist x_0 gleich 0. x_0 ist identisch mit dem oben eingeführten Parameter τ. Die y_0-Achse liegt in der Ebene von C und steht in O senkrecht auf A; wir wollen sie mit B bezeichnen. Die z_0-Achse steht im Punkte O senkrecht zur Ebene von C; sie heiße D.

Mit dieser Hyperbel C fest verbunden bewegt sich das einschalige Hyperboloid Q'

$$\frac{x_0^2}{a'^2}-\frac{y_0^2}{b'^2}+\frac{z_0^2}{k}=1,$$

wobei ist

$$a'=\sqrt{a^2+k},\quad b'=\sqrt{b^2-k},\quad 0<k<b^2.$$

Wir schreiben das Hyperboloid Q':

$$x_0=a'\,\frac{1+u_0v_0}{u_0+v_0}$$

$$y_0=b'\,\frac{1-u_0v_0}{u_0+v_0}$$

$$z_0=\sqrt{k}\,\frac{u_0-v_0}{u_0+v_0}.$$

Die u_0 sowie v_0 bedeuten die beiden Geradenscharen des Hyperboloids Q'. C ist die Fokalhyperbel von Q'. Die andere Fokalkurve, eine Ellipse, die durch F_1 und F_2 gehend L_1 und L_2 zu Brennpunkten hat und zur Ebene von C senkrecht steht, sei $\overline{C}$. Als zu C konfokale Hyperbel, den Hauptschnitt des Hyperboloids mit der Ebene von C, seiner x_0, y_0 Ebene,

haben wir schon C' in die Figur eingezeichnet. Degeneriert Q' in die Ebene der Fokalellipse $\overline{C}$, so degeneriert C' in die doppelt bedeckte Fokalachse A.

Wir geben jetzt die Gleichungen für die Hauptschnitte unseres Hyperboloids Q' an.

I. Schnitt mit der x_0, z_0-Ebene.

Hier ist $y_0 = 0$.

Wir betrachten hier nur den besonderen Fall: $k = b^2$.

Dann ist

$$x_0 = e\,\frac{1+u_0v_0}{u_0+v_0}$$

$$z_0 = b\,\frac{u_0-v_0}{u_0+v_0}.$$

Dies sind die Gleichungen für die Tangentenschar an die Fokalellipse $\overline{C}$. Die Relation $y_0 = 0$ ergibt:

$$v_0 = \frac{1}{u_0}.$$

Setzen wir dies ein, so ist:

$$x_0 = e\,\frac{2u_0}{u_0^2+1};\quad z_0 = b\,\frac{u_0^2-1}{u_0^2+1}$$

das Gleichungssystem für $\overline{C}$ selbst.

II. Schnitt mit der x_0, y_0-Ebene.

Hier ist $z_0 = 0$.

$$x_0 = a'\,\frac{1+u_0v_0}{u_0+v_0};\quad y_0 = b'\,\frac{1-u_0v_0}{u_0+v_0}$$

sind die Gleichungen der Tangentenschar an die zu C konfokale Hyperbel C'. Die Relation $z_0 = 0$ liefert hier $u_0 = v_0$, woraus

$$x_0 = a'\,\frac{1+u_0^2}{2u_0};\quad y_0 = b'\,\frac{1-u_0^2}{2u_0}$$

folgt, die Gleichungen von C' selbst.

Wir wollen jetzt die im Raume orientierten Gleichungen der Kurven und des Hyperboloids angeben. Als Endresultat dieser Betrachtungen erhalten wir die Gleichungen der allgemeinen Strahlenkongruenz S, die beim Abrollen von C durch die Geradenscharen des Hyperboloids Q' erzeugt wird.

Die Tangente RP in unserer Figur hat die Richtungskosinus α, β, γ. Die hierzu senkrechte Hauptnormale PW von Γ besitzt als Richtungskosinus l, m, n. Die Binormale von Γ steht in P auf der Ebene von C senkrecht, sie ist parallel zu der (S. 53 eingeführten) z_0-Achse, der Achse D. Die z_0-Achse besitzt demnach als Richtungskosinus λ, μ, ν. Aus diesen Daten ermitteln wir die Richtungskosinus der Achsen A und B, und zwar als Richtungskosinus für A:

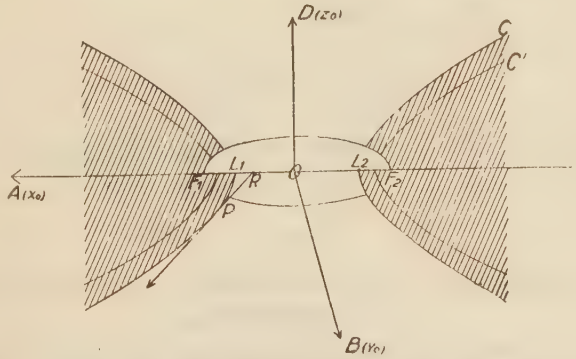
$$\alpha \cos T + l \sin T$$

oder

$$\frac{1}{dn\,u}\,(\alpha \varkappa\, cn\, u + l \varkappa'),$$

und als Richtungskosinus für B:

$$-\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} - T\right) + l \sin\left(\frac{\pi}{2} - T\right)$$
$$= -\alpha \sin T + l \cos T$$
$$= \frac{1}{dn\,u}\,(-\alpha \varkappa' + l \varkappa\, cn\, u).$$



Bedeuten nun x_5, y_5, z_5 die Koordinaten der Mittelpunktskurve O (S. 52), so erhält man nun als Gleichung der Kurve C

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$\mathfrak{x} = x_5 + x_0\left(\frac{\alpha \varkappa\, cn\, u + l \varkappa'}{dn\, u}\right) + \frac{b}{a}\sqrt{x_0^2 - a^2}\,\frac{-\alpha \varkappa' + l \varkappa\, cn\, u}{dn\, u}.$$

Als Gleichung der Kurve C'

$$\frac{x_0^2}{a'^2} - \frac{y_0^2}{b'^2} = 1$$

finden wir

$$\mathfrak{x} = x_5 + x_0 \frac{\alpha \varkappa \, cn\, u + l \varkappa'}{dn\, u} + \frac{b'}{a'} \sqrt{x_0^2 - a'^2} \, \frac{-\alpha \varkappa' + l \varkappa \, cn\, u}{dn\, u}.$$

Dies gibt für $u = \text{const.}$ eine spezielle Lage von C'; für variable u stellt die Gleichung die Gesimsfläche Σ vor, den ersten Brennmantel unseres Strahlensystems.

Die Gleichung der Kurve $\overline{C}$

$$\frac{x_0^2}{e^2} + \frac{z_0^2}{b^2} = 1$$

ist

$$\mathfrak{x} = x_5 + x_0 \frac{\alpha \varkappa \, cn\, u + l \varkappa'}{dn\, u} + \varkappa' \sqrt{e^2 - x_0^2} \, \lambda.$$

Dies ist für variable u die Gleichung des Brennmantels K für den Grenzfall B_{b^2}.

Die Formel des einschaligen Hyperboloids Q' können wir nun schreiben:

$$\mathfrak{x} = x_5 + a' \frac{1 + u_0 v_0}{u_0 + v_0} \frac{\alpha \varkappa \, cn\, u + l \varkappa'}{dn\, u} + b' \frac{1 - u_0 v_0}{u_0 + v_0} \frac{-\alpha \varkappa' + l \varkappa \, cn\, u}{dn\, u} + \sqrt{k} \, \frac{u_0 - v_0}{u_0 + v_0} \lambda.$$

Dies stellt die allgemeine Strahlenkongruenz S vor, wenn man neben u_0, v_0 auch u variieren läßt.

§ 3.

Zerlegung der Strahlenkongruenz in abwickelbare Linienflächen.

Wir gehen hier ganz entsprechend vor wie im gleichen Paragraphen bei der windschiefen Ellipse. Auf Seite 53 fanden wir, daß unsere Parameter x_0 und τ identisch sind, und schreiben daher

$$x_0 = a' \frac{1 + u_0 v_0}{u_0 + v_0} = \tau$$

$$\frac{x_0}{a'} = \frac{\tau}{a'} = \tau_1.$$

Dies führen wir ein in die übrigen Gleichungen für Q'

$$y_0 = b' \frac{1-u_0 v_0}{u_0+v_0}; \quad z_0 = \sqrt{k} \frac{u_0-v_0}{u_0+v_0}.$$

Es ergeben sich dann zwei Darstellungen für Q':

I.

$$u_0 = \frac{1-\tau_1 v_0}{\tau_1-v_0}; \quad \frac{y_0}{b'} = \frac{\tau_1-2v_0+\tau_1 v_0^2}{1-v_0^2}; \quad \frac{z_0}{\sqrt{k}} = \frac{1-2\tau_1 v_0+v_0^2}{1-v_0^2}.$$

II.

$$v_0 = \frac{1-\tau_1 u_0}{\tau_1-u_0}; \quad \frac{y_0}{b'} = \frac{\tau_1-2u_0+\tau_1 u_0^2}{1-u_0^2}; \quad \frac{z_0}{\sqrt{k}} = -\frac{1-2\tau_1 u_0+u_0^2}{1-u_0^2}.$$

Die beiden Darstellungen entsprechen den beiden Geradenscharen. Unsere oben gefundene Gleichung für die Strahlenkongruenz S können wir mit Hilfe dieser Relationen auch in zwei Darstellungen schreiben, was eine Zerlegung von S in die beiden durch die Geraden u_0 und v_0 erzeugten Kongruenzen bedeutet. Wir erhalten:

I.

$$\begin{aligned} \xi = x_0 + \alpha & \frac{a'\tau_1 x(1-v_0^2)\,cn\,u - b'x'(\tau_1-2v_0+\tau_1 v_0^2)}{(1-v_0^2)\,dn\,u} \\ & + l \frac{a'\tau_1 x'(1-v_0^2)+b'x\,cn\,u(\tau_1-2v_0+\tau_1 v_0^2)}{(1-v_0^2)\,dn\,u} \\ & + \lambda\sqrt{k}\frac{1-2\tau_1 v_0+v_0^2}{1-v_0^2}. \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} \xi = x_0 + \alpha & \frac{a'\tau_1 x(1-u_0^2)\,cn\,u - b'x'(\tau_1-2u_0+\tau_1 u_0^2)}{(1-u_0^2)\,dn\,u} \\ & + l \frac{a'\tau_1 x'(1-u_0^2)+b'x\,cn\,u(\tau_1-2u_0+\tau_1 u_0^2)}{(1-u_0^2)\,dn\,u} \\ & - \lambda\sqrt{k}\frac{1-2\tau_1 u_0+u_0^2}{1-u_0^2}. \end{aligned}$$

Unsere beiden Ausdrücke unter I und II gehen in einander über, wenn wir zugleich mit u_0, v_0 das Vorzeichen von $\sqrt{k}$ vertauschen. Wir vereinigen zur Vereinfachung der Rechnung die Ausdrücke I und II. Statt u_0 oder v_0 schreiben

wir eine neue Bezeichnung; es erweist sich als vorteilhaft, einzuführen:

$$u_0 \text{ oder } v_0 = w = sh\,\vartheta + ch\,\vartheta$$

Statt $\pm\sqrt{k}$ setzen wir $\varepsilon\sqrt{k}$, wobei

für $w = v_0$ $\quad \varepsilon = +1$

$w = u_0$ $\quad \varepsilon = -1$ ist.

Wir vermerken für spätere Anwendung noch folgende Relationen:

$$\frac{dw}{du} = \frac{d\vartheta}{du}(sh\,\vartheta + ch\,\vartheta)$$

$$1+w^2 = 2\,ch\,\vartheta\,(sh\,\vartheta + ch\,\vartheta);\quad 1-w^2 = -2\,sh\,\vartheta\,(sh\,\vartheta + ch\,\vartheta)$$

$$\frac{1+w^2}{1-w^2} = -\frac{ch\,\vartheta}{sh\,\vartheta};\quad \frac{2w}{1-w^2} = -\frac{1}{sh\,\vartheta};\quad \frac{2w'}{1-w^2} = -\frac{\vartheta'}{sh\,\vartheta}.$$

Wir erhalten nun als Gleichung des Strahlensystems S:

$$\mathfrak{x} = x_5 + \alpha\frac{a'\tau_1 \varkappa\, cn\,u\,sh\,\vartheta - b'\varkappa'(1-\tau_1 ch\,\vartheta)}{dn\,u\,sh\,\vartheta} + l\frac{a'\tau_1\varkappa' sh\,\vartheta + b'\varkappa\, cn\,u(1-\tau_1 ch\,\vartheta)}{dn\,u\,sh\,\vartheta} + \lambda\varepsilon\sqrt{k}\frac{\tau_1 - ch\,\vartheta}{sh\,\vartheta}.$$

Die Betrachtung des Falles $sh\,\vartheta = 0$ schließen wir aus. Er ergibt Kurven, deren Untersuchung wir auf Seite 15 ausgeschaltet haben. Wir setzen nun den (Seite 52 gefundenen) Wert von x_5 ein und bekommen:

$$(A)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = x + \alpha\,\mathfrak{A} + l\,\mathfrak{B} + \lambda\,\mathfrak{C} \\ \mathfrak{A} = \dfrac{a'\tau_1\varkappa\, sn\,u\,cn\,u\,sh\,\vartheta - e\,cn\,u\,sh\,\vartheta - b'\varkappa' sn\,u(1-\tau_1 ch\,\vartheta)}{sn\,u\,dn\,u\,sh\,\vartheta} \\ \mathfrak{B} = \dfrac{a'\tau_1\varkappa' sh\,\vartheta - a\varkappa' cn\,u\,sh\,\vartheta + \varkappa b'\,cn\,u(1-\tau_1 ch\,\vartheta)}{dn\,u\,sh\,\vartheta} \\ \mathfrak{C} = \dfrac{\varepsilon\sqrt{k}\,(\tau_1 - ch\,\vartheta)}{sh\,\vartheta}. \end{cases}$$

Wir zerlegen nun die Koeffizienten von α, l, λ.

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{sn\,u\,dn\,u\,sh\,\vartheta}\{-[e\,cn\,u\,sh\,\vartheta + b'\varkappa' sn\,u] + \tau_1[a'\varkappa\, sn\,u\,cn\,u\,sh\,\vartheta + b'\varkappa' sn\,u\,ch\,\vartheta]\}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{dn\,u\,sh\,\vartheta}\{-[a\varkappa' sn\,u\,sh\,\vartheta - \varkappa b'\,cn\,u] + \tau_1[a'\varkappa' sh\,\vartheta - \varkappa b'\,cn\,u\,ch\,\vartheta]\}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\varepsilon\sqrt{k}}{sh\,\vartheta}[-ch\,\vartheta + \tau_1].$$

Hier erhält man eine Normalform des Strahlensystems S:

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{x} &= \varphi + r_1 f \\ \mathfrak{y} &= \chi + r_1 g \\ \mathfrak{z} &= \psi + r_1 h. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \varphi &= x + \alpha \mathfrak{A}_1 + l \mathfrak{B}_1 + \lambda \mathfrak{C}_1 \\ f &= \quad \alpha \mathfrak{A}_2 + l \mathfrak{B}_2 + \lambda \mathfrak{C}_2, \end{aligned}$$

wo:

$$\mathfrak{A}_1 = -\frac{\overline{\mathfrak{A}_1}}{sn\,u\,dn\,u\,sh\,\vartheta}; \quad \mathfrak{B}_1 = -\frac{\overline{\mathfrak{B}_1}}{dn\,u\,sh\,\vartheta}; \quad \mathfrak{C}_1 = -\frac{\overline{\mathfrak{C}_1}}{sh\,\vartheta};$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{A}_1} &= e\,cn\,u\,sh\,\vartheta + b' x' sn\,u \\ \overline{\mathfrak{B}_1} &= a x' sn\,u\,sh\,\vartheta - x b'\,cn\,u \\ \overline{\mathfrak{C}_1} &= \varepsilon \sqrt{k}\,ch\,\vartheta. \end{aligned}$$

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{\overline{\mathfrak{A}_2}}{dn\,u\,sh\,\vartheta}; \quad \mathfrak{B}_2 = \frac{\overline{\mathfrak{B}_2}}{dn\,u\,sh\,\vartheta}; \quad \mathfrak{C}_2 = \frac{\overline{\mathfrak{C}_2}}{sh\,\vartheta};$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{A}_2} &= a' x\,cn\,u\,sh\,\vartheta + b' x' ch\,\vartheta \\ \overline{\mathfrak{B}_2} &= a' x' sh\,\vartheta - x b'\,cn\,u\,ch\,\vartheta \\ \overline{\mathfrak{C}_2} &= \varepsilon \sqrt{k}\,. \end{aligned}$$

Es seien nun hier einige Ausdrücke zusammengestellt, deren wir bei der kommenden Rechnung bedürfen:

Wir bilden die Ableitungen von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$ nach u. Es ist:

$$\mathfrak{A}_1' = \frac{\overline{\mathfrak{A}_1}'}{sn^2u\,dn^2u\,sh^2\vartheta}; \quad \mathfrak{B}_1' = -\frac{\overline{\mathfrak{B}_1}'}{dn^2u\,sh^2\vartheta}; \quad \mathfrak{C}_1' = \frac{\overline{\mathfrak{C}_1}'}{sh^2\vartheta};$$

$$\overline{\mathfrak{A}_1}' = e(x'^2 + x^2 cn^4u)\,sh^2\vartheta - b' x' x^2 sn^3u\,cn\,u\,sh\,\vartheta + b' x' sn^2u\,dn\,u\,ch\,\vartheta\vartheta'$$

$$\overline{\mathfrak{B}_1}' = a' x'\,cn\,u\,sh^2\vartheta + b' x x'^2 sn\,u\,sh\,\vartheta + x b'\,cn\,u\,dn\,u\,ch\,\vartheta\vartheta'$$

$$\overline{\mathfrak{C}_1}' = \varepsilon \sqrt{k}\,\vartheta'$$

$$\mathfrak{A}_2' = -\frac{\overline{\mathfrak{A}_2}'}{dn^2u\,sh^2\vartheta}; \quad \mathfrak{B}_2' = \frac{\overline{\mathfrak{B}_2}'}{dn^2u\,sh^2\vartheta}; \quad \mathfrak{C}_2' = -\frac{\overline{\mathfrak{C}_2}'}{sh^2\vartheta};$$

$$\overline{\mathfrak{A}_2}' = a' x x'^2 sn\,u\,sh^2\vartheta - b' x' x^2 sn\,u\,cn\,u\,sh\vartheta\,ch\,\vartheta + b' x' dn\,u\vartheta'$$

$$\overline{\mathfrak{B}_2}' = a' x' x^2 sn\,u\,cn\,u\,sh^2\vartheta + b' x x'^2 sn\,u\,sh\vartheta\,ch\vartheta + b' x\,cn\,u\,dn\,u\,\vartheta'$$

$$\overline{\mathfrak{C}_2}' = \varepsilon \sqrt{k}\,ch\,\vartheta\vartheta'.$$

Wir bilden noch mit Hilfe der Gleichungen (6) in § 1:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi'; \quad \frac{\partial f}{\partial u} = f'$$

und schreiben: $\varphi' = \alpha \mathfrak{D}_1 + l \mathfrak{E}_1 + \lambda \mathfrak{F}_1$

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{\overline{\mathfrak{D}_1}}{dn\,u\,sh^2\vartheta}\,;\quad \mathfrak{E}_1 = \frac{\overline{\mathfrak{E}_1}}{\varrho\,sn^2u\,dn\,u\,sh^2\vartheta}\,;\quad \mathfrak{F}_1 = -\frac{\overline{\mathfrak{F}_1}}{\varrho\,sn^2u\,sh^2\vartheta}\,;$$

$$\overline{\mathfrak{D}_1} = b'\varkappa'\,ch\,\vartheta\vartheta'$$

$$\overline{\mathfrak{E}_1} = \varepsilon e\sqrt{k}\,dn^3u\,sh\,\vartheta\,ch\,\vartheta - \varkappa\,b'sn^2u\,cn\,u\,\varrho\,ch\,\vartheta\vartheta'$$

$$\overline{\mathfrak{F}_1} = ab\,sn\,u\,dn\,u\,sh^2\vartheta - ab'cn\,u\,dn\,u\,sh\,\vartheta - \varepsilon\sqrt{k}\,\varrho\,sn^2u\,\vartheta'.$$

ebenso sei: $f' = \alpha\,\mathfrak{D}_2 + l\,\mathfrak{E}_2 + \lambda\,\mathfrak{F}_2$

$$\mathfrak{D}_2 = -\frac{\overline{\mathfrak{D}_2}}{dn\,u\,sh^2\vartheta}\,;\quad \mathfrak{E}_2 = -\frac{\overline{\mathfrak{E}_2}}{\varrho\,sn^2u\,dn\,u\,sh^2\vartheta}\,;\quad \mathfrak{F}_2 = \frac{\overline{\mathfrak{F}_2}}{\varrho\,sn^2u\,sh^2\vartheta}\,;$$

$$\overline{\mathfrak{D}_2} = b'\varkappa'\vartheta'$$

$$\overline{\mathfrak{E}_2} = \varepsilon e\sqrt{k}\,dn^3u\,sh\,\vartheta - b'\varkappa\varrho\,sn^2u\,cn\,u\,\vartheta'$$

$$\overline{\mathfrak{F}_1} = a'b\,dn\,u\,sh^2\vartheta - ab'cn\,u\,dn\,u\,sh\,\vartheta\,ch\,\vartheta - \varepsilon\sqrt{k}\,\varrho\,sn^2u\,ch\,\vartheta\vartheta'.$$

Um nun die Strahlenkongruenz S in abwickelbare Linienflächen zu zerlegen, gehen wir von den Gleichungen (B) aus. Wir wenden dasselbe Verfahren an wie gelegentlich der windschiefen Ellipse (S. 35) und erhalten dieselbe Gleichung (C). Wir erheben auch hier die drei Summanden I, II, III, die der Gleichung

$$\Delta = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = 0$$

genügen, auf den Generalnenner und erhalten:

$$\mathrm{I} = \mathfrak{D}_1(\mathfrak{B}_2\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{C}_2\mathfrak{E}_2) = \frac{\overline{\mathfrak{D}_1}\,\varrho\,sn^2u\,(\overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{F}_2} + \overline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{E}_2})}{\varrho^2 sn^4u\,dn^2u\,sh^5\vartheta}$$

$$\mathrm{II} = \mathfrak{E}_1(\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{F}_2) = -\frac{\overline{\mathfrak{E}_1}(\overline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2}\,\varrho\,sn^2u + \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{F}_2})}{\varrho^2 sn^4u\,dn^2u\,sh^5\vartheta}$$

$$\mathrm{III} = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{A}_2\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2) = \frac{\overline{\mathfrak{F}_1}(\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{E}_2} - \overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2}\,\varrho\,sn^2u)}{\varrho^2 sn^4u\,dn^2u\,sh^5\vartheta}.$$

Da wir den Fall $sh\,\vartheta = 0$ ausgeschlossen haben, können wir schreiben:

(D) $$\Delta = \overline{\mathfrak{D}_1}(\overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{F}_2} + \overline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{E}_2})\,\varrho\,sn^2u - \overline{\mathfrak{E}_1}(\overline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2}\,\varrho\,sn^2u + \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{F}_2}) + \overline{\mathfrak{F}_1}(\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{E}_2} - \overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2}\,\varrho\,sn^2u) = 0.$$

Zur leichteren Berechnung dieses Ausdrucks führen wir folgende Anordnung ein:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{D}_1}\,\varrho\,sn^2u &= dn\,u\,sh\,\vartheta\,\mathfrak{D}^* + sn^2u\,\varrho\,\vartheta'D\\
-\overline{\mathfrak{E}_1} &= dn\,u\,sh\,\vartheta\,\mathfrak{E}^* + sn^2u\,\varrho\,\vartheta'E\\
+\overline{\mathfrak{F}_1} &= dn\,u\,sh\,\vartheta\,\mathfrak{F}^* + sn^2u\,\varrho\,\vartheta'F.
\end{aligned}$$

Dabei ist:

$$\mathfrak{D}^* = 0 \qquad D = b' \varkappa' ch\,\vartheta$$
$$\mathfrak{E}^* = -\varepsilon e \sqrt{k}\, dn^2 u\, ch\,\vartheta \qquad E = \varkappa b' cn\, u\, ch\,\vartheta$$
$$\mathfrak{F}^* = ab\, sn\, u\, sh\,\vartheta - ab' cn\, u \qquad F = -\varepsilon\sqrt{k}.$$

Ferner:

$$\overline{\mathfrak{B}_2 \mathfrak{F}_2} = dn\, u\, sh\,\vartheta\, \mathfrak{G}^* + sn^2 u\, \varrho\, \vartheta' G$$
$$\overline{\mathfrak{C}_2 \mathfrak{E}_2} = dn\, u\, sh\,\vartheta\, \mathfrak{H}^* + sn^2 u\, \varrho\, \vartheta' H$$
$$\overline{\mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2} \varrho\, sn^2 u = dn\, u\, sh\,\vartheta\, \mathfrak{J}^* + sn^2 u\, \varrho\, \vartheta' I$$
$$\overline{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{F}_2} = dn\, u\, sh\,\vartheta\, \mathfrak{K}^* + sn^2 u\, \varrho\, \vartheta' K$$
$$\overline{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{E}_2} = dn\, u\, sh\,\vartheta\, \mathfrak{L}^* + sn^2 u\, \varrho\, \vartheta' L$$
$$-\overline{\mathfrak{B}_2 \mathfrak{D}_2}\, \varrho\, sn^2 u = dn\, u\, sh\,\vartheta\, \mathfrak{M}^* + sn^2 u\, \varrho\, \vartheta' M$$

$$\mathfrak{G}^* = e(a' \varkappa' sh\,\vartheta - \varkappa b' cn\, u\, ch\,\vartheta)^2$$
$$\mathfrak{H}^* = e k\, dn^2 u$$
$$\mathfrak{J}^* = 0$$
$$\mathfrak{K}^* = -a \varkappa' b'^2 cn\, u\, ch^2\vartheta + a'^2 b \varkappa cn\, u\, sh^2\vartheta + e a' b' (\varkappa'^2 - \varkappa^2 cn^2 u) sh\vartheta\, ch\,\vartheta$$
$$\mathfrak{L}^* = \varepsilon a' a \sqrt{k}\, cn\, u\, dn^2 u\, sh\,\vartheta + \varepsilon b b' \sqrt{k}\, dn^2 u\, ch\,\vartheta$$
$$\mathfrak{M}^* = 0$$

$$G = \varepsilon \varkappa \sqrt{k}\, b' cn\, u\, ch^2\vartheta - \varepsilon a' \varkappa' \sqrt{k}\, ch\,\vartheta\, sh\,\vartheta$$
$$H = \varepsilon b' \varkappa \sqrt{k}\, cn\, u$$
$$I = \varepsilon \sqrt{k}\, b' \varkappa'$$
$$K = -\varepsilon a' \varkappa \sqrt{k}\, cn\, u\, sh\,\vartheta\, ch\,\vartheta - \varepsilon b' \varkappa' \sqrt{k}\, ch^2\vartheta$$
$$L = -a' b' \varkappa^2 cn^2 u\, sh\,\vartheta - b'^2 \varkappa \varkappa' cn\, u\, ch\,\vartheta$$
$$M = -a' b' \varkappa'^2 sh\,\vartheta + \varkappa \varkappa' b'^2 cn\, u\, ch\,\vartheta.$$

Wir bilden die Summen:

$$\mathfrak{G}^* + \mathfrak{H}^* = e(a' \varkappa' sh\,\vartheta - \varkappa b' cn\, u\, ch\,\vartheta)^2 + e k\, dn^2 u$$
$$\mathfrak{J}^* + \mathfrak{K}^* = -a \varkappa' b'^2 cn\, u\, ch^2\vartheta + a'^2 b \varkappa cn\, u\, sh^2\vartheta + e a' b' (\varkappa'^2 - \varkappa^2 cn^2 u)\, sh\,\vartheta\, ch\,\vartheta$$
$$\mathfrak{L}^* + \mathfrak{M}^* = \varepsilon a' a \sqrt{k}\, cn\, u\, dn^2 u\, sh\,\vartheta + \varepsilon b b' \sqrt{k}\, dn^2 u\, ch\,\vartheta$$
$$G + H = sh\,\vartheta [\varepsilon b' \varkappa \sqrt{k}\, cn\, u\, sh\,\vartheta - \varepsilon a' \varkappa' \sqrt{k}\, ch\,\vartheta] = sh\,\vartheta\, (\overline{G + H})$$
$$I + K = -sh\,\vartheta [\varepsilon a' \varkappa \sqrt{k}\, cn\, u\, ch\,\vartheta + \varepsilon b' \varkappa' \sqrt{k}\, sh\,\vartheta] = sh\,\vartheta\, (\overline{I + K})$$
$$L + M = -sh\,\vartheta\, a' b' dn^2 u = sh\,\vartheta\, (\overline{L + M}).$$

Bezeichnen wir nun in der Gleichung (D) die drei Summanden mit I′, II′, III′, so ist:

$$\mathrm{I}' = sh\,\vartheta\,\{dn^2u\,sh\,\vartheta\,\mathfrak{D}^*\,(\mathfrak{G}^*+\mathfrak{H}^*)$$
$$+sn^2u\,dn\,u\,\varrho\,\vartheta'[\mathfrak{D}^*(G+H)+D(\mathfrak{G}^*+\mathfrak{H}^*)]+sn^4u\varrho^2\vartheta'^2D(\overline{G+H})\}.$$

Entsprechende Ausdrücke erhalten wir für II′ und III′. Wenden wir dieselben Bezeichnungen wie bei der windschiefen Ellipse an, so können wir endlich die Differentialgleichung (D) schreiben:

$$sh\,\vartheta\{dn^2u\,sh\,\vartheta\,\Xi+sn^2u\,dn\,u\,\varrho\,\vartheta'H+sn^4u\,\varrho^2\vartheta'^2Z\}=0.$$

Der Fall $sh\,\vartheta=0$ ist oben ausgeschlossen.

Somit bleibt uns:

$$sn^4u\,\varrho^2\vartheta'^2Z+sn^2u\,dn\,u\,\varrho\,\vartheta'H+dn^2u\,sh\,\vartheta\,\Xi=0$$

oder

$$\vartheta'=-\frac{dn\,u\,(H\pm\sqrt{H^2-4\,sh\,\vartheta\,\Xi Z})}{2\,\varrho\,sn^2u\,Z}.$$

Man findet:

$$\Xi=\varepsilon\sqrt{k}\,dn^2u\,sh\,\vartheta\{ab\,(b'^2-a'^2)\,cn\,u\,sh\,\vartheta\,ch\,\vartheta+$$
$$+a'b'(a^2cn^2u\,sh^2\vartheta-b^2ch^2\vartheta)+ab\,sn\,u(aa'cn\,u\,sh\,\vartheta+bb'ch\,\vartheta)\}$$
$$H=dn^2u\,sh^2\vartheta\{bb'(a'^2+k)\,ch\,\vartheta-aa'(b'^2-k)\,cn\,u\,sh\,\vartheta-aa'bb'sn\,u\}$$
$$Z=-\varepsilon\,a'b'\,\sqrt{k}\,dn^2u\,sh^2\vartheta$$

und daraus:

$$\sqrt{H^2-4\,sh\,\vartheta\,\Xi Z}=$$
$$=\pm dn^2u\,sh^2\vartheta\{bb'(a'^2-k)\,ch\,\vartheta-aa'(b'^2+k)\,cn\,u\,sh\,\vartheta-aa'bb'sn\,u\}.$$

Die obige Differentialgleichung zerfällt in folgende zwei:

$$\text{(I)}\qquad \vartheta'=\frac{dn\,u\,[a'b\,ch\,\vartheta-a\,b'cn\,u\,sh\,\vartheta-ab\,sn\,u]}{\varepsilon\,\sqrt{k}\,\varrho\,sn^2u}$$

und

$$\text{(II)}\qquad \vartheta'=\frac{\varepsilon\,\sqrt{k}\,dn\,u\,[a\,a'cn\,u\,sh\,\vartheta+bb'ch\,\vartheta]}{a'b'\varrho\,sn^2u}.$$

Diese beiden Gleichungen verbunden mit der Gleichung (A) definieren die abwickelbaren Linienflächen der Strahlenkongruenz S. Wir erhalten je zwei Scharen solcher Flächen: zwei durch (I) und (II) definierte für die durch die Geraden v_0 ($\varepsilon=+1$) und zwei für die durch die Geraden u_0 ($\varepsilon=-1$) erzeugte Kongruenz.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Gratlinien dieser abwickelbaren Flächen über, die auf der Gesimsfläche Σ liegen, dem ersten Brennmantel unseres Strahlensystems. Wir stellen dieselbe Betrachtung an wie bei Gelegenheit der windschiefen Ellipse (S. 38) und finden, daß wir auch hier zu den gesuchten Gratlinien gelangen, wenn wir in der Gleichung

$$\mathfrak{x} = x + \alpha\,\mathfrak{A} + l\,\mathfrak{B} + \lambda\,\mathfrak{C}$$

setzen: $$\mathfrak{C} = 0,$$

woraus folgt: $$\tau_1 = ch\,\vartheta.$$

Führen wir nun in die Gleichung (A) den gefundenen Wert für τ_1 ein, so stellt diese in Verbindung mit den Differentialgleichungen (I) und (II) zwei Scharen konjugierter Kurven dar, von denen aber nur die eine aus den gesuchten auf Σ befindlichen Gratlinien besteht. Analog dem gleichen Fall bei der windschiefen Ellipse finden wir, daß nur die Gleichung (I) in Verbindung mit (A) Gratlinien und somit die transformierten windschiefen Hyperbeln vorstellt.

§ 4.

Transformierte windschiefe Hyperbeln.

Die Gratlinien, deren Gleichungen wir soeben gefunden haben, sind nach dem Satz II wieder windschiefe Hyperbeln und sind isometrisch mit dem ursprünglich gegebenen windschiefen Kegelschnitt Γ. Diese Behauptung ist nun zu beweisen. Man könnte genau so wie für die windschiefe Ellipse den Beweis durch die Aufstellung der natürlichen Gleichungen erbringen, indessen begnügen wir uns für die windschiefe Hyperbel damit, den Zusammenhang und die Identität unserer Endformeln mit denen bei Bianchi festzustellen.

Zuerst seien noch einmal explizit die Formeln für die transformierten windschiefen Hyperbeln Γ'' zusammengestellt:

A. Windschiefe Hyperbeln, erhalten durch den allgemeinen Fall B_k der Bianchischen Transformation:

$$\text{(III)}\quad \mathfrak{x}=x+\alpha\frac{a'\varkappa\, sn\,u\, cn\,u\, ch\,\vartheta - e\, cn\,u - b'\varkappa' sn\,u\, sh\,\vartheta}{sn\,u\, dn\,u} + l\frac{a'\,\varkappa'\, ch\,\vartheta - a\,\varkappa'\, sn\,u + \varkappa\, b'\, cn\,u\, sh\,\vartheta}{dn\,u}$$

$$\text{(I)}\qquad \vartheta'=\frac{dn\,u[a'b\,ch\,\vartheta - ab'\,cn\,u\,sh\,\vartheta - ab\,sn\,u]}{\varepsilon\sqrt{k}\,\varrho\, sn^2 u}.$$

Wir erhalten hier zwei Scharen von Kurven, indem wir einmal ε den Wert $+1$, dann -1 beilegen. Im Grenzfall B_{b^2} fallen die beiden Strahlenkongruenzen ($\varepsilon=+1$) und ($\varepsilon=-1$) in eine zusammen. Hier resultiert nur eine Schar von Kurven Γ'; wir lassen daher das ε in der Differentialgleichung fortfallen.

B. Grenzfall B_{b^2}.

$$\text{(IIIa)}\quad \mathfrak{x}=x-\alpha\frac{e\, cn\,u}{sn\,u\, dn\,u}[1-\varkappa\, sn\,u\, ch\,\vartheta]+l\frac{b}{dn\,u}[ch\,\vartheta-\varkappa\, sn\,u]$$

$$\text{(Ia)}\qquad \vartheta'=\frac{e\, dn\,u[ch\,\vartheta-\varkappa\, sn\,u]}{\varrho\, sn^2 u}.$$

Bezeichnen wir nun wieder die Variabeln bei Bianchi mit U und V, so läßt sich leicht folgender Zusammenhang zwischen diesen und unsern Variabeln u, ϑ feststellen:

Es ist: $\vartheta = V$

$$sn\,u=\frac{1}{ch\,U};\quad cn\,u=\pm tgh\,U;\quad dn\,u=\frac{\sqrt{ch^2U-\varkappa^2}}{ch\,U}$$

und $$\frac{dU}{ch\,U}=-dn\,u\,du;\quad \varrho=-T.$$

Mit Hilfe dieser Substitutionen kann man alle unsere Formeln in die entsprechenden bei Bianchi überführen und umgekehrt.

Bemerkt sei hier, daß das in der Differentialgleichung für den Grenzfall B_{b^2}, die Bianchi auf Seite 340 angibt, auftretende e gleich unserem $\frac{1}{\varkappa}$ ist.

Aus den Bianchischen Resultaten leiten wir noch durch obige Substitution her die Gleichung für die Bogenlänge der transformierten windschiefen Hyperbeln:

$$ds_3 = + \sqrt{a^2 sh^2 \vartheta + b^2 ch^2 \vartheta}\, d\vartheta ;$$

für ihren Krümmungsradius

$$r_3 = \frac{1}{ab} \sqrt{a^2 sh^2 \vartheta + b^2 ch^2 \vartheta}^3 ;$$

für den Torsionsradius im Falle B_k

$$\varrho_3 = \frac{(a' \varkappa' ch\, \vartheta - a \varkappa' sn\, u + \varkappa b' cn\, u\, sh\, \vartheta)^2}{k \varrho},$$

und für den Fall B_{k^2}

$$\varrho_3 = \frac{(ch\, \vartheta - \varkappa\, sn\, u)^2}{\varrho}.$$

Endlich gelten hier auch die Überlegungen über Lösungen der Differentialgleichungen (I) und (Ia). Ist eine bestimmte Funktion $\vartheta_1(u)$ gegeben, die differentiierbar und keine Konstante ist, so ist für windschiefe Hyperbeln Γ, deren Torsionsradius

$$\varrho = \frac{dn\, u\, [a' b\, ch\, \vartheta_1 - a\, b' cn\, u\, sh\, \vartheta_1 - a\, b\, sn\, u]}{\varepsilon \sqrt{k}\, \vartheta_1'\, sn^2 u}$$

ist, ϑ_1 als eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung bekannt. Es ist eine Transformierte Γ' angebbar, und da die Differentialgleichung (I) eine Riccatische ist, mit Hilfe von Quadraturen auch die andern alle, wenn eine andere Riccatische Gleichung gelöst werden kann, wie auf Seite 45 auseinandergesetzt ist.

Abschnitt III.

Transformation der windschiefen Parabel.

§ 1.

Formeln für die windschiefen Parabeln Γ, die durch Torsion aus einer ebenen C hervorgehen.

Gegeben sei eine ebene Parabel C mit den Gleichungen

$$x = \frac{t^2}{2p}; \quad y = t.$$

Wir berechnen ihre Bogenlänge s und den Krümmungsradius r, welche alle windschiefen Parabeln Γ, die durch Torsion aus C erzeugt werden, mit ihr in entsprechenden Punkten gemeinsam haben.

Das Bogenelement ist

$$ds = + \sqrt{\frac{t^2}{p^2} + 1}\, dt. \tag{1}$$

Der Quadratwurzel legen wir das positive Vorzeichen bei, indem wir festsetzen, daß s mit t wachsen soll.

Für den Krümmungsradius erhalten wir:

$$r = \frac{\sqrt{t^2 + p^2}^3}{p^2}. \tag{2}$$

Wir betrachten jetzt den Kontingenzwinkel dT. Im ersten Quadranten nimmt T ab, während s und t wachsen; daher ist zu schreiben:

$$-\frac{dT}{ds} = \frac{1}{r}, \text{ da } r > 0 \text{ ist, oder}$$

$$\frac{dT}{dt}\frac{dt}{ds} = -\frac{1}{r} \text{ und hieraus}$$

(3) $$\frac{dT}{dt} = -\frac{p}{t^2+p^2}.$$

Man integriert und erhält:

$$T = \operatorname{arc\,cotg}\left(\frac{t}{p}\right) - \frac{\pi}{2} + C.$$

Aus dem Umstande, daß im Punkt $t = 0$, dem Scheitel der Parabel, $T = \frac{\pi}{2}$ ist, bestimmt man

$$C = \frac{\pi}{2},$$

sodaß schließlich resultiert:

$$t = p \operatorname{cotg} T.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichungen (1) und (2) ein, so resultiert:

(1a) $$ds = -\frac{p\,dT}{\sin^3 T}$$

(2a) $$r = \frac{p}{\sin^3 T}.$$ [1])

Die berechneten Größen s, r und dT sind der ebenen Parabel C und der aus ihr durch Torsion erzeugten Γ gemeinsam. Wir bemerken hier die natürliche Gleichung der Parabel, die für C wie Γ gilt:

(4) $$\frac{ds}{dr} = \frac{\sqrt[3]{p}}{3\sqrt{r^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}}}}.$$

Zu dieser tritt für die windschiefe Parabel noch eine zweite natürliche Gleichung:

$$\varrho = f(T).$$

Die windschiefe Parabel Γ habe als Koordinaten eines beliebigen Punktes x, y, z und als Richtungskosinus

(5) der zugehörigen Tangente $\alpha \quad \beta \quad \gamma$
der Hauptnormale $l \quad m \quad n$
und der Binormale $\lambda \quad \mu \quad \nu$.

---

1) Nicht $r = -\frac{p}{\sin^3 T}$, wie bei Kößler Seite 59.

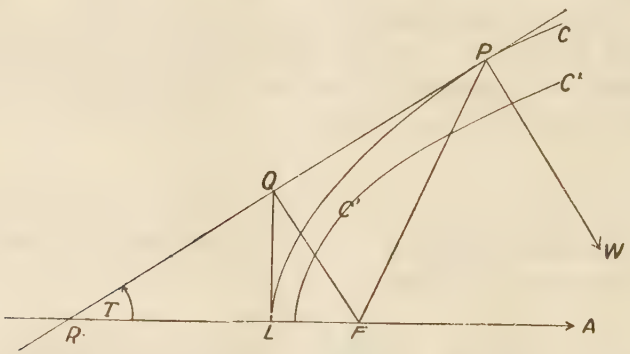
Mit Hilfe der Relationen (1a) und (2a) führen wir die Frenetschen Formeln in die folgenden über, die wir zu späterem Gebrauch hier anmerken:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dT} = -\alpha\,\dfrac{p}{\sin^3 T} \\ \dfrac{d\alpha}{dT} = -l \\ \dfrac{dl}{dT} = \alpha + \lambda\,\dfrac{p}{\varrho \sin^3 T} \\ \dfrac{d\lambda}{dT} = -l\,\dfrac{p}{\varrho \sin^3 T}\,. \end{cases}$$

§ 2.

Die mit C beim Abrollen auf Γ verbundenen Kurven und Flächen und die Strahlenkongruenz S.

Die Figur stellt die ebene Parabel C dar, die ihre Deformierte Γ im Punkte P berührt. RP ist ihre gemeinsame Tangente. Die Bogenlänge von C wächst in der Richtung



von L nach P; demnach ist RP die positive Richtung der Tangente. Die Hauptachse von C bezeichnen wir mit A; auf ihr liegt der Brennpunkt F und der Scheitel L. Die Achse A und die Tangente in P schneiden einander in R unter dem Winkel T. PW ist die Normale in P.

Rollt C auf Γ ab, so beschreibt die zu C konfokale Parabel C' die Gesimsfläche Σ; eine abwickelbare Linienfläche

Σ' wird dabei erzeugt durch die Fokalachse A. Σ' hat die Kurve R als Gratlinie. Der Scheitel- und Brennpunkt erzeugen die Scheitel- und Brennpunktskurve. Die Ableitung ihrer Gleichungen wird in der Kößlerschen Arbeit gegeben. Wir geben hier die berichtigten Endformeln an:

Brennpunktskurve F:

$$x_1 = x - \alpha \frac{p}{2} \frac{\cos T}{\sin^2 T} + l \frac{p}{2} \frac{1}{\sin T}.$$

Scheitelkurve L:

$$x_2 = x - \alpha \frac{p}{2} \frac{\cos T}{\sin^2 T}(1+\sin^2 T) + l \frac{p}{2} \frac{\cos^2 T}{\sin T}.$$

Die Kurven x_1 und x_2 sind Parallelkurven, Filarevolventen der Kurve R und zugleich Planevolventen der windschiefen Parabel Γ. Ihre Gleichungen genügen der allgemeinen Form:

$$x_n = x + \alpha \cos T \left[\tau - \frac{p(1+\sin^2 T)}{2\sin^2 T}\right] + l \sin T \left[\tau + \frac{p}{2} \operatorname{cotg}^2 T\right].$$

τ ist ein Parameter auf A, der in L gleich 0 ist und nach F hin wächst. x_n ist eine allgemeine Parallelkurve der Schar, beschrieben von einem Punkte der Achse A, der von O um die Strecke τ entfernt ist.

Kurve R.

Sie ist die Gratlinie der Fläche Σ'.

$$x_s = x - \alpha p \frac{\cos T}{\sin^2 T}.$$

Wir geben ihre Bestimmungsstücke an:

$$\begin{aligned}
s_s &= -\frac{p \cos^2 T}{2 \sin^2 T} \\
\alpha_s &= \alpha \cos T + l \sin T \\
l_s &= \varepsilon \lambda \\
\lambda_s &= \varepsilon \varepsilon_1 (-\alpha \sin T + l \cos T) \\
r_s &= \varepsilon \varrho \operatorname{cotg} T;\ \varepsilon = \pm 1 \text{ derart, daß } r_s > 0 \\
\varrho_s &= \varepsilon_1 \varrho,\ \varepsilon_1 = \pm 1.
\end{aligned}$$

Es ist: $$\frac{p}{2}\left(\frac{r_3}{\varrho_3}\right)^2+s_3=0.$$

Von der ebenen Parabel C, für die wir im § 1 eine Parameterdarstellung gegeben haben, betrachten wir jetzt die Darstellung, die Bianchi in Lezioni III auf S. 325 gibt:

$$x_0{}^2=2pz_0$$
$$x_0=\sqrt{p}\,\bar{u},\ y_0=0,\ z_0=\frac{\bar{u}_0{}^2}{2}.$$

An unserer Figur läßt sich das hier eingeführte Koordinatensystem folgendermaßen orientieren:

Die z_0-Achse fällt mit der Achse A zusammen, in L ist z_0 gleich 0; die x-Achse liegt in der Ebene von C und steht in L senkrecht auf A, wir wollen sie mit B bezeichnen. Die z_0-Achse steht im Punkte L senkrecht zur Ebene von C, sie heiße D.

Mit dieser Parabel C fest verbunden bewegt sich das hyperbolische Paraboloid Q':

$$\frac{x_0{}^2}{p'}-\frac{y_0{}^2}{k}=2z_0-k\ .$$

wobei: $$p'=p-k,\ 0<k<p.$$

Wir stellen das Paraboloid Q' dar durch die Formeln:

$$x_0=\sqrt{p'}\,(u_0+v_0)$$
$$y_0=\sqrt{k}\ (u_0-v_0)$$
$$z_0=2u_0v_0+\frac{k}{2}.$$

Die u_0 und v_0 bedeuten die beiden Geradenscharen des hyperbolischen Paraboloids. C ist eine Fokalparabel von Q'; die andere Fokalparabel, die durch F gehend L zum Brennpunkt hat und zur Ebene von C senkrecht steht, sei $\overline{C}$. Der Schnitt des Paraboloids Q' mit der Ebene von C ist die Parabel C', die zu C konfokal ist. Degeneriert Q' in die Ebene der Fokalparabel $\overline{C}$, so degeneriert C' in die doppelt bedeckte Fokalachse A.

Wir geben jetzt Gleichungen für die Hauptschnitte des Paraboloids Q' an.

I. Schnitt mit der y_0, z_0-Ebene.

Hier ist: $x_0 = 0$.

Wir betrachten nur den Sonderfall $k = p$. Dann ist

$$y_0 = \sqrt{p}\,(u_0 - v_0)$$
$$z_0 = \frac{p + 4\,u_0 v_0}{2}.$$

Dies sind die Gleichungen für die Tangentenschar an die Fokalparabel $\overline{C}$. Die Relation $x_0 = 0$ ergibt:

$$v_0 = -u_0.$$

Setzen wir dies ein, so ist

$$y_0 = 2\sqrt{p}\,u_0;\quad z_0 = \frac{p - 4\,u_0^2}{2}$$

das Gleichungssystem für $\overline{C}$ selbst.

II. Schnitt mit der x_0, z_0-Ebene,

Hier ist: $y_0 = 0$

und
$$x_0 = \sqrt{p'}\,(u_0 + v_0)$$
$$z_0 = \frac{k + 4\,u_0 v_0}{2}.$$

Dies sind die Gleichungen der Tangentenschar an die zu C konfokale Parabel C'. Die Relation $y_0 = 0$ liefert hier $v_0 = u_0$, woraus

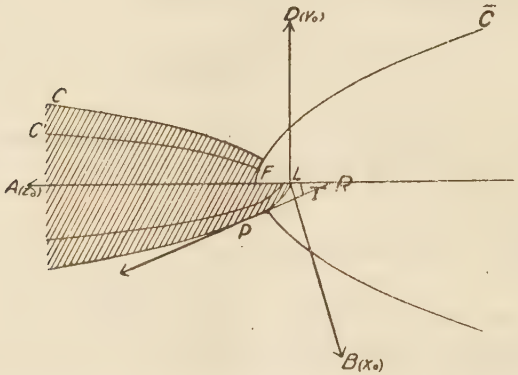
$$x_0 = 2\sqrt{p'}\,u_0;\quad z_0 = \frac{k + 4\,u_0^2}{2} \text{ folgt,}$$

die Gleichungen von C' selbst.

Wir wollen jetzt die Raumgleichungen der Kurven und der Quadrik angeben. Als Endresultat dieser Betrachtungen erhalten wir dann die Gleichungen der allgemeinen Strahlenkongruenz S, die beim Abrollen von C durch die Gradenscharen des Paraboloids Q' erzeugt wird.

Die Tangente RP in der Figur hat die Richtungskosinus α, β, γ. Die hierzu senkrechte Hauptnormale PW von Γ besitzt als Richtungskosinus l, m, n. Die Binormale von Γ ist parallel der Achse D; diese, die y_0-Achse besitzt demnach als Richtungskosinus λ, μ, ν. Aus diesen Daten erhalten wir

für die Richtungskosinus von A: $\alpha \cos T + l \sin T$,
für die Richtungskosinus von B: $-\alpha \sin T + l \cos T$.



Bedeuten nun x_2, y_2, z_2 die Koordinaten der Scheitelkurve L (S. 69), so erhält man als Gleichung der Kurve C

$$x_0^2 = 2 p z_0$$

$$\mathfrak{x} = x_2 + z_0(\alpha \cos T + l \sin T) + \sqrt{2 p z_0}(-\alpha \sin T + l \cos T).$$

Als Gleichung der Kurve C'

$$x_0^2 = p'(2 z_0 - k)$$

finden wir:

$$\mathfrak{x} = x_2 + z_0(\alpha \cos T + l \sin T) + \sqrt{p'(2 z_0 - k)}\,(-\alpha \sin T + l \cos T).$$

Dies gibt für spezielle u spezielle Lagen von C'; für variable u stellt die Gleichung die Gesimsfläche Σ vor, den ersten Brennmantel unseres Strahlensystems.

Die Gleichung der Kurve $\bar{C}$

$$y_0^2 = p(p - 2 z_0)$$

ist

$$\mathfrak{x} = x_2 + z_0(\alpha \cos T + l \sin T) + \sqrt{p(p - 2 z_0)}\,\lambda.$$

Dies ist für variable u die Gleichung des Brennmantels K für den Grenzfall B_p.

Die Formel für das hyperbolische Paraboloid Q' können wir nun schreiben:

$$\mathfrak{x} = x_2 + \frac{4 u_0 v_0 + k}{2}(\alpha \cos T + l \sin T)$$
$$+ \sqrt{p'}(u_0 + v_0)(-\alpha \sin T + l \cos T) + \sqrt{k}(u_0 - v_0)\lambda.$$

Dies stellt die allgemeine Strahlenkongruenz S dar, wenn man neben u_0, v_0 auch T variieren läßt.

§ 3.
Zerlegung der Strahlenkongruenz in abwickelbare Linienflächen.

Auch hier gehen wir entsprechend vor wie im gleichen Paragraphen bei der windschiefen Ellipse. Wir sehen, daß die Parameter z_0 und τ (S. 69) identisch sind, und schreiben daher:

$$z_0 = 2u_0 v_0 + \frac{k}{2} = \tau .$$

Dies führen wir ein in die übrigen Gleichungen für Q'

$$x_0 = \sqrt{p'}(u_0 + v_0);\ y_0 = \sqrt{k}(u_0 - v_0)$$

und erhalten daraus zwei Darstellungen für Q':

I.

$$u_0 = \frac{2\tau - k}{4v_0};\ x_0 = \sqrt{p'}\,\frac{2\tau - k + 4v_0^2}{4v_0};\ y_0 = \sqrt{k}\,\frac{2\tau - k - 4v_0^2}{4v_0}.$$

II.

$$v_0 = \frac{2\tau - k}{4u_0};\ x_0 = \sqrt{p'}\,\frac{2\tau - k + 4u_0^2}{4u_0};\ y_0 = -\sqrt{k}\,\frac{2\tau - k - 4u_0^2}{4u_0}.$$

Die beiden Darstellungen entsprechen den beiden Geradenscharen auf Q'. Die oben gefundene Gleichung für die Strahlenkongruenz S können wir mit Hilfe dieser Relationen auch in zwei Darstellungen schreiben, was eine Zerlegung von S in seine beiden Unterkongruenzen bedeutet. Wir erhalten:

I.

$$\mathfrak{x} = x_2 + \tau(\alpha\cos T + l\sin T) + \sqrt{p'}\,\frac{2\tau - k + 4v_0^2}{4v_0}(-\alpha\sin T + l\cos T) + \sqrt{k}\,\frac{2\tau - k - 4v_0^2}{4v_0}\lambda.$$

II.

$$\mathfrak{x} = x_2 + \tau(\alpha\cos T + l\sin T) + \sqrt{p'}\,\frac{2\tau - k + 4u_0^2}{4u_0}(-\alpha\sin T + l\cos T) - \sqrt{k}\,\frac{2\tau - k - 4u_0^2}{4u_0}\lambda.$$

Die Ausdrücke unter I und II gehen in einander über, wenn man zugleich mit u_0, v_0 das Vorzeichen von $\sqrt{k}$ vertauscht. Zur Vereinfachung der Rechnung vereinigen wir I und II, indem wir statt u_0, v_0 eine neue Bezeichnung w und $\varepsilon\sqrt{k}$ statt $\pm\sqrt{k}$ schreiben, wobei sein soll

$$\varepsilon = +1 \text{ bei } w = v_0$$
$$\varepsilon = -1 \qquad w = u_0.$$

Wir erhalten dann als Gleichung das Strahlensystem S:

$$\mathfrak{x} = x_2 + \tau(\alpha\cos T + l\sin T) + \sqrt{p'}\,\frac{2\tau - k + 4w^2}{4w}(\quad \alpha\sin T + l\cos T) + \varepsilon\sqrt{k}\,\frac{2\tau - k - 4w^2}{4w}\lambda.$$

Den Fall $w = 0$ schließen wir aus. Er ergibt Kurven, deren Untersuchung wir auf Seite 15 ausgeschaltet haben. Wir setzen den (S. 69 gefundenen) Wert von x_2 ein und bekommen:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \mathfrak{x} = x + \alpha\mathfrak{A} + l\mathfrak{B} + \lambda\mathfrak{C} \\ \mathfrak{A} = -\dfrac{2w\cos T(p + p\sin^2 T - 2\tau\sin^2 T) + \sqrt{p'}\sin^3 T(2\tau - k + 4w^2)}{4w\sin^2 T} \\ \mathfrak{B} = \dfrac{2pw\cos^2 T + 4\tau w\sin^2 T + \sqrt{p'}\sin T\cos T(2\tau - k + 4w^2)}{4w\sin T} \\ \mathfrak{C} = \varepsilon\sqrt{k}\,\dfrac{2\tau - k - 4w^2}{4w}. \end{cases}$$

Man zerlegt nun die Koeffizienten von α, l, λ:

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{4w\sin^2 T}\{[2pw\cos T(1 + \sin^2 T) + \sqrt{p'}\sin^3 T(4w^2 - k)] - 2\tau\sin^2 T[2w\cos T - \sqrt{p'}\sin T]\}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{4w\sin T}\{\cos T[2pw\cos T + \sqrt{p'}\sin T(4w^2 - k)] + 2\tau\sin T[2w\sin T + \sqrt{p'}\cos T]\}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\varepsilon\sqrt{k}}{4w}\{-(4w^2 + k) + 2\tau\}.$$

Auf diese Weise erhält man eine Darstellung des Strahlensystems S:

$$\text{(B)}\qquad \begin{aligned} \mathfrak{x} &= \varphi + \imath f \\ \mathfrak{y} &= \chi + \imath g \\ \mathfrak{z} &= \psi + \imath h . \end{aligned}$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} \varphi &= x + \alpha \mathfrak{A}_1 + l \mathfrak{B}_1 + \lambda \mathfrak{C}_1 \\ f &= \quad \alpha \mathfrak{A}_2 + l \mathfrak{B}_2 + \lambda \mathfrak{C}_2 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{A}_1 = -\frac{\overline{\mathfrak{A}}_1}{4 w \sin^2 T};\quad \mathfrak{B}_1 = \frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{4 w \sin T};\quad \mathfrak{C}_1 = -\frac{\overline{\mathfrak{C}}_1}{4 w};$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{A}}_1 &= 2 p w \cos T (1 + \sin^2 T) + \sqrt{p'} \sin^3 T (4 w^2 - k) \\ \overline{\mathfrak{B}}_1 &= \cos T [(2 p w \cos T + \sqrt{p'} \sin T (4 w^2 - k)] \\ \overline{\mathfrak{C}}_1 &= \varepsilon \sqrt{k} (4 w^2 + k). \end{aligned}$$

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{\overline{\mathfrak{A}}_2}{2 w};\quad \mathfrak{B}_2 = \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{2 w};\quad \mathfrak{C}_2 = \frac{\overline{\mathfrak{C}}_2}{2 w};$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{A}}_2 &= 2 w \cos T - \sqrt{p'} \sin T \\ \overline{\mathfrak{B}}_2 &= 2 w \sin T + \sqrt{p'} \cos T \\ \overline{\mathfrak{C}}_2 &= \varepsilon \sqrt{k}. \end{aligned}$$

Nun seien hier einige Ausdrücke zusammengestellt, deren wir bei der kommenden Rechnung bedürfen:

Wir bilden die Ableitungen von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$ nach u. Es ist, wenn wir $\frac{d w}{d T}$ mit w' bezeichnen:

$$\mathfrak{A}_1' = -\frac{\overline{\mathfrak{A}}'}{4 w^2 \sin^3 T};\quad \mathfrak{B}_1' = -\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1'}{4 w^2 \sin^2 T};\quad \mathfrak{C}_1' = -\frac{\overline{\mathfrak{C}}_1'}{4 w^2};$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{A}}_1' = w[&-2 p w (2 - \sin^2 T \cos^2 T) + \sqrt{p'} \sin^3 T \cos T (4 w^2 - k)] \\ &+ \sqrt{p'}\, w' \sin^4 T (4 w^2 + k) \\ \overline{\mathfrak{B}}_1' = 2 p w^2 \cos T &(1 + \sin^2 T) - \sqrt{p'}\, w \sin^3 T (k - 4 w^2) \\ &- \sqrt{p'}\, w' \sin^2 T \cos T (4 w^2 + k) \\ \overline{\mathfrak{C}}_1' = \varepsilon \sqrt{k} &(4 w^2 - k)\, w'. \end{aligned}$$

$$\mathfrak{A}_2' = -\frac{\overline{\mathfrak{A}}_2'}{2 w^2};\quad \mathfrak{B}_2' = \frac{\overline{\mathfrak{B}}_2'}{2 w^2};\quad \mathfrak{C}_2' = -\frac{\overline{\mathfrak{C}}_2'}{2 w^2};$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{A}}_2' &= 2 w^2 \sin T + \sqrt{p'}\, w \cos T - \sqrt{p'}\, w' \sin T \\ \overline{\mathfrak{B}}_2' &= 2 w^2 \cos T - \sqrt{p'}\, w \sin T - \sqrt{p'}\, w' \cos T \\ \overline{\mathfrak{C}}_2' &= \varepsilon \sqrt{k}\, w'. \end{aligned}$$

Wir bilden noch mit Hilfe der Gleichungen (6) in § 1:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T} = \varphi' ; \quad \frac{\partial f}{\partial T} = f'$$

und schreiben: $\varphi' = \alpha \mathfrak{D}_1 + l \mathfrak{E}_1 + \lambda \mathfrak{F}_1$,

$$\mathfrak{D}_1 = -\frac{\overline{\mathfrak{D}_1}}{4 w^2} ; \quad \mathfrak{E}_1 = \frac{\overline{\mathfrak{E}_1}}{4 w^2 \varrho \sin^3 T} ; \quad \mathfrak{F}_1 = \frac{\overline{\mathfrak{F}_1}}{4 w^2 \varrho \sin^4 T} ;$$

$$\overline{\mathfrak{D}_1} = \sqrt{p'} \sin T (4 w^2 + k) w'$$

$$\overline{\mathfrak{E}_1} = \varepsilon \sqrt{k}\, p\, w (4 w^2 + k) + w' \sqrt{p'}\, \varrho \sin^3 T \cos T (4 w^2 + k)$$

$$\overline{\mathfrak{F}_1} = 2 p^2 w^2 \cos^2 T + \sqrt{p'} p w \sin T \cos T (4 w^2 - k) - \varepsilon \sqrt{k} (4 w^2 - k) \varrho \sin^4 T w' ;$$

ebenso sei: $f' = \alpha \mathfrak{D}_2 + l \mathfrak{E}_2 + \lambda \mathfrak{F}_2$,

$$\mathfrak{D}_2 = \frac{\overline{\mathfrak{D}_2}}{2 w^2} ; \quad \mathfrak{E}_2 = -\frac{\overline{\mathfrak{E}_2}}{2 w^2 \varrho \sin^3 T} ; \quad \mathfrak{F}_2 = \frac{\overline{\mathfrak{F}_2}}{2 w^2 \varrho \sin^3 T} ;$$

$$\overline{\mathfrak{D}_2} = \sqrt{p'} w' \sin T$$

$$\overline{\mathfrak{E}_2} = \varepsilon \sqrt{k}\, p\, w + \sqrt{p'}\, \varrho \sin^3 T \cos T\, w'$$

$$\overline{\mathfrak{F}_2} = 2 p w^2 \sin T + \sqrt{p'}\, p\, w \cos T - \varepsilon \sqrt{k}\, \varrho \sin^3 T\, w'.$$

Um die Strahlenkongruenz S in abwickelbare Flächen zu zerlegen, gehen wir von den Gleichungen (B) aus. Wir verfahren in derselben Weise wie gelegentlich der windschiefen Ellipse (S. 35) und erhalten dieselbe Gleichung (C). Wir erheben auch hier die drei Summanden I, II, III, die der Gleichung $\Delta = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = 0$ genügen, auf den Generalnenner und erhalten:

$$\mathrm{I} = \mathfrak{D}_1 (\mathfrak{B}_2 \mathfrak{F}_2 - \mathfrak{C}_2 \mathfrak{E}_2) = -\frac{\overline{\mathfrak{D}_1} \varrho \sin^4 T (\overline{\mathfrak{B}_2 \mathfrak{F}_2} + \overline{\mathfrak{C}_2 \mathfrak{E}_2})}{16 w^5 \varrho^2 \sin^7 T}$$

$$\mathrm{II} = \mathfrak{E}_1 (\mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2 - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{F}_2) = \frac{\overline{\mathfrak{E}_1} \sin T (\overline{\mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2} \sin^3 T - \overline{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{F}_2})}{16 w^5 \varrho^2 \sin^7 T}$$

$$\mathrm{III} = \mathfrak{F}_1 (\mathfrak{A}_2 \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{B}_2 \mathfrak{D}_2) = -\frac{\overline{\mathfrak{F}_1} (\overline{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{E}_2} + \overline{\mathfrak{B}_2 \mathfrak{D}_2} \varrho \sin^3 T)}{16 w^5 \varrho^2 \sin^7 T} .$$

Da wir den Fall $w = 0$ ausgeschlossen haben, können wir schreiben:

$$\Delta =$$

(D) $$\overline{\mathfrak{D}_1} \varrho \sin^4 T (\overline{\mathfrak{B}_2 \mathfrak{F}_2} + \overline{\mathfrak{C}_2 \mathfrak{E}_2}) - \overline{\mathfrak{E}_1} \sin T (\overline{\mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2}\, \varrho \sin^3 T - \overline{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{F}_2}) + \overline{\mathfrak{F}_1} (\overline{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{F}_2} + \overline{\mathfrak{B}_2 \mathfrak{D}_2}\, \varrho \sin^3 T) = 0.$$

Zur leichteren Berechnung dieses Ausdrucks führen wir folgende Anordnung ein:

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{D}_1}\,\varrho\sin^4 T &= p\,w\,\mathfrak{D}^* + w'\,\varrho\sin^4 T\,D\\ -\overline{\mathfrak{E}_1}\sin T &= p\,w\,\mathfrak{E}^* + w'\,\varrho\sin^4 T\,E\\ \overline{\mathfrak{F}_1} &= p\,w\,\mathfrak{F}^* + w'\,\varrho\sin^4 T\,F.\end{aligned}$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^* &= 0\\ \mathfrak{E}^* &= -\varepsilon\sqrt{k}\sin T(4w^2+k)\\ \mathfrak{F}^* &= 2p\,w\cos^2 T+\sqrt{p'}\sin T\cos T(4w^2-k)\\ D &= \sqrt{p'}\sin T(4w^2+k)\\ E &= -\sqrt{p'}\cos T(4w^2+k)\\ F &= -\varepsilon\sqrt{k}\,(4w^2-k).\end{aligned}$$

Ferner sei:

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{F}_2} &= p\,w\,\mathfrak{G}^* + w'\,\varrho\sin^3 T\,G\\ \overline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{E}_2} &= p\,w\,\mathfrak{H}^* + w'\,\varrho\sin^3 T\,H\\ \overline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2}\,\varrho\sin^3 T &= p\,w\,\mathfrak{J}^* + w'\,\varrho\sin^3 T\,I\\ -\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{F}_2} &= p\,w\,\mathfrak{K}^* + w'\,\varrho\sin^3 T\,K\\ \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{E}_2} &= p\,w\,\mathfrak{L}^* + w'\,\varrho\sin^3 T\,L\\ \overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2}\,\varrho\sin^3 T &= p\,w\,\mathfrak{M}^* + w'\,\varrho\sin^3 T\,M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^* &= (2w\sin T+\sqrt{p'}\cos T)^2\\ \mathfrak{H}^* &= k\\ \mathfrak{J}^* &= 0\\ \mathfrak{K}^* &= -4w^2\sin T\cos T-2w\sqrt{p'}(\cos^2 T-\sin^2 T)+p'\sin T\cos T\\ \mathfrak{L}^* &= 2\varepsilon\sqrt{k}\,w\cos T-\varepsilon\sqrt{k\,p'}\sin T\\ \mathfrak{M}^* &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G &= -2\,\varepsilon\sqrt{k}\,w\sin T-\varepsilon\sqrt{k\,p'}\cos T\\ H &= \qquad\qquad\quad \varepsilon\sqrt{k\,p'}\cos T\\ I &= \qquad\qquad\quad \varepsilon\sqrt{k\,p'}\sin T\\ K &= 2\varepsilon\sqrt{k}\,w\cos T-\varepsilon\sqrt{k\,p'}\sin T\\ L &= 2\sqrt{p'}\,w\cos^2 T-p'\sin T\cos T\\ M &= 2\sqrt{p'}\,w\sin^2 T+p'\sin T\cos T.\end{aligned}$$

Wir bilden die Summen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^*+\mathfrak{H}^* &= 4w^2\sin^2 T+4\sqrt{p'}\,w\sin T\cos T+p'\cos^2 T+k\\ \mathfrak{J}^*+\mathfrak{K}^* &= -4w^2\sin T\cos T-2w\sqrt{p'}\cos^2 T+2w\sqrt{p'}\sin^2 T+p'\sin T\cos T\\ \mathfrak{L}^*+\mathfrak{M}^* &= 2\,\varepsilon\sqrt{k}\,w\cos T-\varepsilon\sqrt{k\,p'}\sin T\end{aligned}$$

$$G+H=-2w\varepsilon\sqrt{k}\sin T=2w(\overline{G+H})$$
$$I+K=\ \ 2w\varepsilon\sqrt{k}\cos T=2w(\overline{I+K})$$
$$L+M=\ \ 2w\ \sqrt{p'}\ \ \ \ \ \ =2w(\overline{L+M}).$$

Bezeichnen wir nun wieder in der Gleichung (D) die drei Summanden mit I', II', III', so ist:

$$I'=$$
$$w\{p^2w\mathfrak{D}^*(\mathfrak{G}^*+\mathfrak{H}^*)+pw'\varrho\sin^3T[\mathfrak{D}^*(G+H)+\sin T\,D\,(\mathfrak{G}^*+\mathfrak{H}^*)]$$
$$+2w'^2\varrho^2\sin^7T\,D\,(\overline{G+H})\}.$$

Entsprechende Ausdrücke resultieren für II' und III'. Wenden wir entsprechende Bezeichnungen wie bei der windschiefen Ellipse an, so läßt sich endlich die Difierentialgleichung (D) schreiben:

$$w\{p^2w\,\Xi+p\,w'\varrho\sin^3T\,H+2\,w'^2\varrho^2\sin^7T\,Z\}=0.$$

Der Fall $w=0$ ist oben ausgeschlossen worden.

Somit bleibt uns:

$$2\,w'^2\varrho^2\sin^7T\,Z+p\,w'\varrho\sin^3T\,H+p^2w\,\Xi=0$$

oder:

$$w'=-p\,\frac{H\pm\sqrt{H^2-8w\sin T\,\Xi\,Z}}{4\sin^4T\,\varrho\,Z}\ .$$

Man findet, daß:

$$\Xi=2\,\varepsilon\sqrt{k}\,w[(2\,w\cos T-\sqrt{p'}\sin T)\{\sin^2T\,(4\,w^2+k)+$$
$$+\cos T(4\,w\sqrt{p'}\sin T+p\cos T)\}]$$
$$H=4w^2[\sqrt{p'}\sin^2T(4\,w^2+3\,k)+p\sqrt{p'}\cos^2T-4\,w\sin T\cos T(k-p')]$$
$$Z=-8\,\varepsilon\sqrt{k\,p'}\,w^2$$

und daraus: $\sqrt{H^2-8\,w\sin T\,\Xi\,Z}=$

$$\pm4\,w^2\,[\sqrt{p'}\sin^2T(4\,w^2-k)+p\sqrt{p'}\cos^2T+4\,w\sin T\cos T(k+p')].$$

Die obige Differentialgleichung zerfällt in folgende zwei:

(I) $$w'=p\,\frac{(4\,w^2+k)\sin^2T+p\cos^2T+4\sqrt{p'}\,w\sin T\cos T}{4\,\varepsilon\sqrt{k}\,\varrho\sin^4T}$$

(II) $$w'=\varepsilon\sqrt{k}\,p\,\frac{\sqrt{p'}\sin T-w\cos T}{2\sqrt{p'}\,\varrho\sin^3T}\ .$$

Diese beiden Gleichungen definieren in Verbindung mit der Gleichung (A) die abwickelbaren Linienflächen der Strahlenkongruenz S. Wir erhalten je zwei Scharen solcher Flächen: zwei durch (I) und (II) definierte für die durch die Geraden v_0 ($\varepsilon = +1$) und zwei für die durch die Geraden u_0 ($\varepsilon = -1$) erzeugte Kongruenz.

Zur Bestimmung der Gratlinien dieser abwickelbaren Flächen, die auf der Gesimsfläche Σ liegen, stellen wir dieselbe Überlegung an wie bei der windschiefen Ellipse (S. 38) und finden, daß wir zu den gesuchten Gratlinien gelangen, wenn wir in der Gleichung:

$$\mathfrak{x} = x + a\,\mathfrak{A} + l\,\mathfrak{B} + \lambda\,\mathfrak{C}$$

setzen: $$\mathfrak{C} = 0,$$

woraus sich bestimmt: $\tau = k + 4\,w^2$.

Führen wir nun in die Gleichung (A) den gefundenen Wert für τ ein, so stellt diese in Verbindung mit den Differentialgleichungen (I) und (II) zwei Scharen konjugierter Kurven dar, von denen jedoch nur eine aus den gesuchten Gratlinien besteht. Analog dem gleichen Fall bei der windschiefen Ellipse finden wir, daß nur die Gleichung (I) in Verbindung mit (A) Gratlinien und somit die transformierten windschiefen Parabeln vorstellt.

§ 4.

Transformierte windschiefe Parabeln.

Die Gratlinien, deren Gleichungen wir soeben gefunden haben, sind nach dem Satze II wieder windschiefe Parabeln; sie sind isometrisch mit der ursprünglich gegebenen windschiefen Parabel Γ. Den Beweis für diese Behauptung beschränken wir, wie schon bei der windschiefen Hyperbel, darauf, daß wir die Identität unserer Endformeln mit denen bei Bianchi feststellen.

Vorerst mögen noch einmal die Formeln für die transformierten windschiefen Parabeln Γ' zusammengestellt werden.

A. Windschiefe Parabeln, erhalten durch den allgemeinen Fall B_k der Bianchischen Transformation:

$$\text{(III)}\quad \xi = x - \alpha \frac{(p + p' \sin^2 T - 4w^2 \sin^2 T)\cos T + 4\sqrt{p'}\, w \sin^3 T}{2 \sin^2 T} + l \frac{(4w^2 + k)\sin^2 T + p \cos^2 T + 4 w \sqrt{p'} \sin T \cos T}{2 \sin T}.$$

$$\text{(I)}\quad w' = p \frac{(4 w^2 + k)\sin^2 T + p \cos^2 T + 4 w \sqrt{p'} \sin T \cos T}{4 \varepsilon \sqrt{k} \sin^4 T \varrho}.$$

Wir erhalten hier zwei Scharen von Kurven, indem wir einmal ε den Wert $+1$, dann -1 beilegen. Im Grenzfall B_p fallen die beiden Strahlenkongruenzen ($\varepsilon = +1$) und ($\varepsilon = -1$) in eine zusammen. Dort resultiert nur eine Schar von Kurven Γ'; wir lassen daher das ε in der Differentialgleichung fortfallen.

B. Grenzfall B_p.

$$\text{(IIIa)}\quad \xi = x - \alpha \frac{\cos T}{2 \sin^2 T} [p - 4w^2 \sin^2 T] + l \frac{1}{2 \sin T} [p + 4 w^2 \sin^2 T]$$

$$w' = \frac{\sqrt{p}\,[p + 4 w^2 \sin^2 T]}{4 \sin^4 T \varrho}.$$

Bezeichnen wir nun wieder die Variabeln bei Bianchi mit U und V, so läßt sich leicht folgender Zusammenhang zwischen diesen und unsern Variabeln T, w feststellen. Es ist:

$$\sin^2 T = \frac{p}{U^2 + p}$$

$$2w = V, \quad \frac{dV}{dU} = -\frac{2 w' \sin^2 T}{\sqrt{p}}; \quad \varrho = -T_1,$$

wo wir, um Verwechslungen mit unserem Tangentenwinkel T zu vermeiden, den Bianchischen Torsionsradius mit T_1 bezeichnen.

Aus den Bianchischen Resultaten leiten wir noch durch obige Substitution her die Formel für die Bogenlänge der transformierten windschiefen Parabeln:

$$ds_3 = 2\sqrt{4 w^2 + p}\, dw;$$

für ihren Krümmungsradius:

$$r_3 = \frac{\sqrt{4\,w^2 + p^3}}{\sqrt{p}};$$

für den Torsionsradius im Falle B_k:

$$\varrho_3 = \frac{p}{4\,k\,\varrho \sin^4 T}\{(4w^2+k)\sin^2 T + p\cos^2 T + 4w\sqrt{p'}\sin T\cos T\}^2,$$

und für den Fall B_p:

$$\varrho_3 = \frac{1}{4\,\varrho \sin^4 T}\{p + 4\,w^2 \sin^2 T\}^2.$$

Auch hier gelten die Überlegungen, die wir über Lösungen der Differentialgleichungen (I) und (Ia) schon auf Seite 45 angestellt haben. Ist eine bestimmte Funktion $w_1(T)$ gegeben, die differentiierbar und keine Konstante ist, so ist für windschiefe Parabeln Γ, deren Torsionsradius:

$$\varrho = \frac{(4\,w_1{}^2+k)\sin^2 T + p\cos^2 T + 4\,w_1\sqrt{p'}\sin T\cos T}{4\,\varepsilon\sqrt{k}\sin^4 T\,w_1{}'}$$

ist, w_1 als partikuläre Lösung der Differentialgleichung bekannt. Es würde eine Transformierte Γ' angebbar sein, und da die Differentialgleichung (I) eine Riccatische ist, auch die andern alle, wenn eine andere Riccatische Gleichung gelöst werden kann, wie auf Seite 45 auseinandergesetzt ist.

Am Schlusse meiner Arbeit erlaube ich mir, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Gutzmer, und Herrn Professor Dr. Salkowski-Berlin für die freundliche Anregung zu diesen Untersuchungen meinen verbindlichsten Dank auszusprechen, wie für die wertvollen Ratschläge und die liebenswürdige Unterstützung, die beide Herren bei der Ausführung in reichem Maße mir zuteil werden ließen.

Lebenslauf.

Am 15. Juni 1888 bin ich, Friedrich Kurth, als Sohn des Stadtsekretärs Friedrich Kurth zu Nienburg-Saale geboren. Ich bin anhaltischer Staatsangehöriger und evangelischen Bekenntnisses. Von Ostern 1894 bis Ostern 1899 besuchte ich die Mittelschule meiner Vaterstadt und von da ab das Herzogliche Karlsgymnasium zu Bernburg, wo ich Ostern 1908 die Reifeprüfung bestand. Nun wandte ich mich dem Studium der Mathematik, Physik und Chemie zu, dem ich von Ostern 1908 bis dahin 1909 in Halle, von Ostern 1909 bis Ostern 1911 in Göttingen und von Ostern 1911 wieder in Halle oblag. Das examen rigorosum bestand ich am 17. Februar 1913.

Ich hörte bei folgenden Herren Dozenten:

in Göttingen:

Hilbert, Klein, Koebe, Landau, Mügge, G. E. Müller, Pompeckj, Prandtl, Runge, Schwarzschild, Voigt, Wallach, Wiechert, Zermelo, Zsigmondy;

in Halle:

Dorn, Ebbinghaus, Eberhard, Fries, Gutzmer, Krueger, Menzer, Philippson, Scupin, Stammler, Vorländer, Walther, Wangerin, Wüst.

Allen genannten Herren bin ich zu großem Danke verpflichtet.